ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

30:1

STOCKHOLM
BEIJERS BOKFÖRLAGSAKTIEBOLAG.
1905.

CENTRALTRYCKERIET, STOCKHOLM.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.

PARIS
A. HERMANN.

ACTA

MATHEMATICA

ACTA

MATHEMATICA

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

30

STOCKHOLM
BEIJERS BOKFÖRLAGSAKTIEBOLAG.
1906.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
PRINZ LOUIS FERDINANDSTRASSE 2.

CENTRALTRYCKERIET, STOCKHOLM.

PARIS
A. HERMANN.
8 RUE DE LA SORBONNE

INHALTSVERZEICHNISS. — TABLE DES MATIÈRES.

BAND 30. — 1906. — TOME 30.

Seite. Pages.

BAIRE, RENÉ. Sur la représentation des fonctions discontinues ... 1— 48

BISCONCINI, GIULIO. Sur le problème des trois corps .... 49— 92

BJERKNES, V. Recherche sur les champs de force hydrodynamiques ... 99—143

BROMWICH, T. J. I'A. On the roots of the characteristic equation of a linear substitution ... 297—304

FATOU, P. Séries trigonométriques et séries de Taylor .... 335—400

JENSEN, J. L. W. V. Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes ... 175—193

VON KOCH, HELGE. Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes 145—174

KÖNIG, I. Sur les fondements de la théorie des ensembles et le problème du continu ... 329—334

LANDAU, EDMUND. Über einen Satz von Herrn Phragmén... 195—201

LERCH, M. Essais sur le calcul du nombre des classes de formes quadratiques binaires aux coefficients entiers ... 203—294

Inhaltsverzeichniss. — Table des matières.

	Seite. Pages.
LEVI-CIVITA, T. Sur la résolution qualitative du problème restreint des trois corps	305—327
MEYER, W. FR. Eine auf unendliche Produkte sich beziehende Fehlerabschätzungsregel	93— 98
RICHARD, I. Lettre à Monsieur le rédacteur de la Revue Générale des Sciences	295—296
Bibliographie	401—410

SUR LA REPRÉSENTATION DES FONCTIONS DISCONTINUES

PAR

RENÉ BAIRE

à MONTPELLIER.

PREMIÈRE PARTIE.

Introduction.

Le présent mémoire constitue la première partie d'un travail dans lequel je me propose d'exposer l'ensemble des résultats que j'ai obtenus dans l'étude du problème suivant: Caractériser les fonctions discontinues (de n variables) représentables par des séries simples, doubles, triples, etc. de fonctions continues, et que j'appelle fonctions de classes $1, 2, 3, \ldots$.

En ce qui concerne le cas des séries simples (fonctions de classe 1), j'ai exposé d'une manière complète la solution du problème dans mes »Leçons sur les fonctions discontinues».[1] Je renverrai souvent le lecteur à ce livre, dans lequel j'ai eu l'occasion de traiter plusieurs questions qui me sont utiles pour l'étude que j'ai en vue, en particulier la théorie des nombres transfinis (Chapitre II).

Voici un résumé des matières traitées dans le présent mémoire.

Je donne, au chapitre I, la définition des diverses classes de fonctions, ainsi que quelques propriétés générales qui en résultent d'une manière immédiate.

Je rappelle, au chapitre II, les principaux théorèmes de la théorie des ensembles de points à n dimensions dont j'ai besoin pour la suite.

---

[1] Editées chez Gauthier-Villars, dans la »Collection de monographies sur la théorie des fonctions» publiée sous la direction de M. Borel. Voir, dans les »Leçons sur les fonctions de variables réelles», de M. Borel (même collection), Note II, une autre solution, de M. Lebesgue.

Dans le chapitre III, après avoir rappelé le théorème général concernant les fonctions représentables par des séries de fonctions continues, je donne à ce résultat une extension, relative au cas où l'on se donne une fonction définie en des points dont l'ensemble ne constitue pas un continu, ni même un ensemble fermé, et où l'on veut savoir sous quelles conditions on peut compléter la définition de la fonction de manière à obtenir une fonction de classe 1 sur un ensemble fermé. Cette généralisation, outre l'intérêt qu'elle présente par elle-même, m'est nécessaire pour la suite de mes recherches.

Au chapitre IV, j'établis l'existence d'une certaine propriété qui appartient aux fonctions continues et qui *se conserve à la limite,* c'est-à-dire qui, dès qu'elle appartient à tous les termes d'une suite de fonctions tendant vers une fonction limite, appartient aussi à cette dernière fonction.

J'aborde, au chapitre V, l'étude des fonctions de classes 2 et 3, dont je démontre l'existence effective. Pour poursuivre cette étude, j'ai été conduit, comme je l'ai indiqué d'une façon succincte dans des notes aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (décembre 1899), à transformer les notions d'ensemble de points et de point limite. Toutefois, la notion nouvelle dont il s'agit n'apparaît pas dans le présent mémoire; elle sera exposée avec tous les développements nécessaires dans un mémoire ultérieur.

CHAPITRE I.

Définition des diverses classes de fonctions.

1. Désignons par R l'ensemble des nombres réels, par R' l'ensemble obtenu en adjoignant à R les éléments $+\infty$, $-\infty$. Une suite: u_1, $u_2, \ldots, u_n, \ldots$ a pour limite λ ($u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ et λ appartenant à R') si, quels que soient les nombres λ' et λ'' tels que $\lambda' < \lambda < \lambda''$ (l'un des nombres λ' et λ'' pouvant ne pas exister), il y a un entier p tel que $n > p$ entraîne $\lambda' < u_n < \lambda''$.

P étant un ensemble *fermé* de l'espace à n dimensions G_n, si, à chaque point A de P correspond un nombre de R', $f(A)$, l'ensemble de ces nombres constitue une fonction définie sur P. Si tous les nombres

$f(A)$ appartiennent à R, la fonction est dite *finie*. Si les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble des nombres $f(A)$ appartiennent à R, la fonction est dite *bornée*.

Une fonction f définie sur P est dite *continue* si elle a en chaque point une valeur finie et si, $A_1, A_2, \ldots, A_h, \ldots$ étant une suite de points de P tendant vers un point A_0 (qui fait nécessairement partie de P), on a: $\lim_{h=\infty} f(A_h) = f(A_0)$.

Toute fonction non continue est *discontinue*.

Si l'on a des fonctions: $f_1, f_2, \ldots, f_p, \ldots$ et f, définies sur P, et telles que, A étant un point quelconque de P, on a: $\lim_{p=\infty} f_p(A) = f(A)$, on dit que *$f$ est la limite de f_p*.

P étant toujours un ensemble fermé de G_n, aux différents nombres ordinaux des classes I et II nous ferons correspondre des classes de fonctions définies sur P au moyen de la définition suivante.

1° Une fonction continue appartient à la classe 0.

2° Une fonction appartient à la classe α ($\alpha > 0$) si elle est la limite d'une suite de fonctions appartenant à des classes marquées par des nombres inférieurs à α, et si elle ne fait pas partie de l'une de ces classes.

Soit E l'ensemble des fonctions appartenant à toutes les classes marquées par les nombres des classes I et II. Je dis que E contient toutes ses fonctions limites, c'est-à-dire que si une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ a pour limite f, et si toutes les fonctions f_ν appartiennent à E, il en est de même de f. En effet, les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ appartiennent à certaines classes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu, \ldots$, il existe un nombre α des classes I ou II supérieur à tous les α_ν; donc f est de classe α ou de classe inférieure; donc f fait partie de E.

2. Soit f une fonction quelconque définie sur l'ensemble fermé P. Soient b et B deux nombres finis ($b < B$). Appelons transformation $\theta(b, B)$ la transformation qui remplace f par une fonction φ ainsi définie:

En un point A de P où: $\quad f(A) \leqq b, \quad \varphi(A) = b.$

En un point où: $\quad b \leqq f(A) \leqq B, \quad \varphi(A) = f(A).$

En un point où: $\quad B \leqq f(A), \quad \varphi(A) = B.$

On voit d'abord que, si f est continue, φ l'est aussi. Car, pour deux points quelconques A et A', on a:

$$|\varphi(A) - \varphi(A')| \leqq |f(A) - f(A')|.$$

Donc, si A' varie et tend vers A supposé fixe, le second membre tend vers o, par suite aussi le premier.

Supposons maintenant qu'on considère une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ ayant une limite f; la transformation $\theta(b, B)$, appliquée à toutes ces fonctions, donne de nouvelles fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ et φ; je dis que φ_ν tend vers φ. Il y a, pour un point A de P, trois cas possibles:

1° $b < f(A) < B$. Quand ν dépasse une certaine valeur p, on a: $b < f_\nu(A) < B$, et par suite: $\varphi_\nu(A) = f_\nu(A)$; comme $\varphi(A) = f(A)$, on a: $\lim \varphi_\nu(A) = \varphi(A)$.

2° $B \leqq f(A)$. A $\varepsilon > 0$ correspond p tel que, si $\nu \geqq p$, on a: $B - \varepsilon < f_\nu(A)$. Dans ces conditions, que $f_\nu(A)$ surpasse ou non B, on a: $B - \varepsilon < \varphi_\nu(A) \leqq B$; comme $\varphi(A) = B$, on a encore: $\lim \varphi_\nu(A) = \varphi(A)$.

3° $f(A) \leqq b$. La démonstration est analogue.

Cela posé, je dis que la transformation $\theta(b, B)$, appliquée à une fonction f de classe $\leqq \alpha$, donne une fonction φ de classe $\leqq \alpha$. Le fait a été établi pour $\alpha = 0$. Pour qu'il soit établi dans le cas général, il suffit, d'après le principe de récurrence généralisé, de montrer qu'en l'admettant pour tous les nombres inférieurs au nombre déterminé α, il a encore lieu pour α. Or, si f est de classe $\leqq \alpha$, f est la limite d'une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ dont chacune est de classe $< \alpha$; en appliquant à toutes ces fonctions la transformation $\theta(b, B)$, on obtient une suite φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ tendant vers φ, et chacune des fonctions φ_ν est de classe $< \alpha$, d'après l'hypothèse admise; donc φ est de classe $\leqq \alpha$.

Si f, supposée de classe $\leqq \alpha$, est bornée, si m et M sont ses bornes inférieure et supérieure, en prenant: $b = m$, $B = M$, on a $\varphi = f$, la suite $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ tend vers f, et on a: $m \leqq \varphi_\nu \leqq M$. Donc, *une fonction bornée de classe $\leqq \alpha$ peut être considérée comme la limite d'une suite de fonctions de classes $< \alpha$, dont chacune est comprise entre les bornes de f.*

3. La somme algébrique, le produit d'un nombre fini de fonctions finies de classe $\leqq \alpha$ est de classe $\leqq \alpha$. Dans le cas de $\alpha = 0$, cela résulte de la définition des fonctions continues. Admettons le théorème pour tous

les nombres inférieurs au nombre α, et étendons-le à ce nombre; il suffit de considérer le cas de deux fonctions. Soient donc f et g deux fonctions finies et de classes $\leqq \alpha$; elles sont respectivement limites de fonctions f_ν et g_ν de classes $< \alpha$; d'après l'hypothèse admise, $f_\nu \pm g_\nu$, $f_\nu g_\nu$ sont de classes au plus égales à la plus grande des classes de f_ν et g_ν, donc de classes $< \alpha$; or $f_\nu \pm g_\nu$, $f_\nu g_\nu$ tendent vers $f \pm g$, fg, qui sont donc de classes $\leqq \alpha$.

Une série, dont tous les termes sont des fonctions finies de classes $< \alpha$, si elle est convergente en tout point de P, définit par sa somme une fonction de classe $\leqq \alpha$; car la somme des n premiers termes est une fonction de classe $< \alpha$.

Une série, dont tous les termes $u_1, u_2, \ldots, u_\nu, \ldots$ sont des fonctions finies définies en tous les points de P, et qui est convergente en chacun de ces points, est dite *uniformément convergente sur P* si, quel que soit $\varepsilon > 0$, et quel que soit l'entier h, il existe un entier $n > h$ tel qu'on a, en tout point de P:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots| < \varepsilon.$$

Nous allons montrer que, *si les termes d'une telle série sont des fonctions de classes $\leqq \alpha$, la somme f de la série est aussi de classe $\leqq \alpha$.* Dans le cas de $\alpha = 0$, ce théorème se réduit à une proposition connue relative aux fonctions continues.[1]

Pour traiter le cas de $\alpha > 0$, j'utiliserai la remarque suivante:[2] *Étant donnée une série uniformément convergente: $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, on peut, par un certain groupement de termes consécutifs, la remplacer par une série: $U_0, U_1, \ldots, U_i, \ldots$ dont les termes sont, à partir du second, inférieurs en valeur absolue à ceux d'une série convergente à termes positifs numériques donnée.*

Si les u_n sont de classes $< \alpha$, il en sera de même des U_i, dont chacun est la somme d'un nombre fini de termes u_n.

Tout revient donc à montrer que si l'on a une série de fonctions de classes $\leqq \alpha$: $u_1, u_2, \ldots, u_\nu, \ldots$ et une série convergente à termes numériques positifs: $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$, telles que: $|u_\nu| \leqq a_\nu$, la somme f de la série est de classe $\leqq \alpha$.

D'après l'hypothèse, il y a, pour u_ν, une suite de fonctions $u_{\nu,1}$, $u_{\nu,2}, \ldots, u_{\nu,p}, \ldots$, tendant vers u_ν, toutes de classes $< \alpha$, et telles que,

[1] *Leçons sur les fonctions discontinues*, p. 111.

[2] Pour la démonstration, voir loc. cit., p. 112.

quel que soit p: $|u_{\nu,p}| \leqq a_\nu$. Si on pose: $f_i = u_{1,i} + u_{2,i} + \ldots + u_{i,i}$, on vérifie[1] que f_i a pour limite f. Or, f_i est de classe $< \alpha$, comme somme d'un nombre fini de fonctions de classes $< \alpha$. Donc f est de classe $\leqq \alpha$.

Etant donnée une série uniformément convergente, on dit que la somme f_ν des ν premiers termes tend uniformément vers la somme de la série. On voit que, si une fonction f_ν de classe $\leqq \alpha$ tend uniformément vers une limite f, f est aussi de classe $\leqq \alpha$.

Si une fonction f est telle que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une fonction φ de classe $\leqq \alpha$ différant de f de moins de ε, f est de classe $\leqq \alpha$. En effet, prenons une suite de nombres positifs tendant vers 0, soit ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$ et prenons, pour chaque ε_ν, une fonction f_ν de classe $\leqq \alpha$ telle que $|f_\nu - f| < \varepsilon_\nu$; on voit que f_ν tend uniformément vers f, qui est par suite de classe $\leqq \alpha$.

4. Montrons que l'étude des fonctions non finies ou non bornées peut se ramener à l'étude des fonctions bornées. Nous utiliserons pour cela la transformation T qui remplace la variable y pouvant prendre toutes les valeurs de R' par une nouvelle variable z définie comme il suit:

$$T \begin{cases} \text{Pour} \quad -\infty \leqq y \leqq 0, & z = \dfrac{y}{1-y}, \\ \text{Pour} \quad 0 \leqq y \leqq +\infty, & z = \dfrac{y}{1+y}. \end{cases}$$

On sait[2] que si les nombres: $y_1, y_2, \ldots, y_\nu, \ldots$ et y_0, appartenant à R', ont pour transformés par T les nombres $z_1, z_2, \ldots, z_\nu, \ldots$ et z_0, il y a équivalence entre les conditions:

$$\lim y_\nu = y_0 \quad \text{et} \quad \lim z_\nu = z_0.$$

En appliquant la transformation T aux valeurs d'une fonction f définie sur un ensemble P, on obtient une fonction φ, comprise entre -1 et 1, qui est la transformée de f par T; f est la transformée de φ par T^{-1}.

I. Si on considère une suite de points de P: $A_1, A_2, \ldots, A_h, \ldots$ ayant pour limite un point A, il y a équivalence entre les conditions:

$$\lim f(A_h) = f(A) \quad \text{et} \quad \lim \varphi(A_h) = \varphi(A).$$

[1] loc. cit., p. 113.
[2] loc. cit., p. 122.

II. Si l'on a des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ et f, définies sur P, et si leurs transformées par T sont $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ et φ, il y a équivalence entre les conditions:

$$\lim f_\nu = f \quad \text{et} \quad \lim \varphi_\nu = \varphi.$$

Nous avons réservé le mot de fonction continue aux fonctions *finies*. Une fonction peut avoir en certains points l'une des valeurs $+\infty$, $-\infty$, et posséder en tout point A la propriété: $\lim f(A_h) = f(A)$ pour toute suite de points $A_1, A_2, \ldots, A_h, \ldots$ tendant vers A. Nous dirons qu'une telle fonction est continue (sens étendu). D'après I, on voit que:

Une fonction f et sa transformée φ sont continues (sens étendu) ou non en même temps.

Si f est de classe 0, il en est de même de φ; mais, si φ est de classe 0, f n'est de classe 0 que si elle est finie. Je dis que, *étant données une fonction f et sa transformée φ, si l'une de ces deux fonctions est de classe α ($\alpha \geqq 1$), il en est de même de l'autre.*

Admettons cette proposition pour toutes les valeurs de $\alpha \geqq 1$ et inférieures à un nombre β, et démontrons-la pour β.

1° Si f est de classe β, il y a une suite $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ tendant vers f, chaque fonction f_ν étant de classe $< \beta$. Les transformées $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ de $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ sont, d'après la proposition admise, de classes $< \beta$ et tendent vers φ; donc φ est de classe $\leqq \beta$.

2° Si φ est de classe β, il y a une suite $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\nu, \ldots$ tendant vers φ, chaque fonction φ_ν étant de classe $< \beta$ et étant comprise, comme φ, entre -1 et 1. Prenons une suite de nombres positifs inférieurs à 1 et tendant vers 1, soit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\nu, \ldots$. La fonction $\lambda_\nu \varphi_\nu$, qui tend vers φ, est comprise entre des nombres intérieurs à l'intervalle $(-1, 1)$; donc la transformée de $\lambda_\nu \varphi_\nu$ par T^{-1}, soit f_ν, est bornée; f_ν est de même classe que $\lambda_\nu \varphi_\nu$, c'est-à-dire que φ_ν, si cette classe est $\geqq 1$, d'après la proposition admise, et aussi dans le cas où elle est égale à 0, car alors f_ν, étant bornée, est une fonction continue proprement dite; ainsi les f_ν, qui tendent vers f, sont de classes $< \beta$; donc f est de classe $\leqq \beta$.

Les fonctions f et φ appartiennent donc à deux classes dont aucune ne peut surpasser l'autre; donc f et φ sont de même classe.

On voit, en outre, qu'une fonction f *quelconque* de classe $\leqq \alpha$ peut

être considérée comme la limite d'une suite de fonctions *bornées* de classes $<\alpha$.

Supposons qu'on soit parvenu à déterminer une condition (A) nécessaire et suffisante pour qu'une fonction *bornée* soit de classe $\leqq \alpha$ (α étant $\geqq 1$ et déterminé); supposons que la condition (A) soit invariante par rapport aux transformations T et T^{-1}, c'est-à-dire que, φ étant la transformée par T d'une fonction f, les fonctions f et φ remplissent en même temps ou non la condition (A); je dis que (A) est la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction *quelconque* soit de classe $\leqq \alpha$. En effet: 1° si f est de classe $\leqq \alpha$, φ est aussi de classe $\leqq \alpha$, et, étant bornée, satisfait à (A); donc f satisfait à (A). 2° si f satisfait à (A), il en est de même de φ; φ, étant bornée, est de classe $\leqq \alpha$, donc f aussi. Cela nous permettra, dans la suite, d'introduire le plus souvent la restriction qu'on s'occupe de fonctions bornées, les résultats s'étendant facilement au cas général.

CHAPITRE II.

Les ensembles à n dimensions.

5. J'indique ici les résultats relatifs à la théorie des ensembles de points à n dimensions dont j'ai besoin pour la suite; pour la plupart d'entre eux, je me contente de donner les énoncés, renvoyant pour les démonstrations aux »Leçons sur les fonctions discontinues», (Ch. V, section I).

$P, Q, R, \ldots$ étant des ensembles de points dans G_n, on désigne par $D(P, Q, R, \ldots)$ l'ensemble des points communs à $P, Q, R, \ldots$, par $M(P, Q, R, \ldots)$ l'ensemble formé par la réunion de $P, Q, R, \ldots$; quand $P, Q, R, \ldots$ n'ont deux à deux aucun point commun, on écrit aussi: $M(P, Q, R, \ldots) = P + Q + R + \ldots$.

Si $P, Q, R, \ldots$ sont *fermés* et en nombre *fini*, $M(P, Q, R, \ldots)$ est *fermé*, car tout point limite pour cet ensemble est limite pour l'un au moins des ensembles $P, Q, R, \ldots$.

Si $P, Q, R, \ldots$ sont *fermés*, $D(P, Q, R, \ldots)$, s'il existe, est *fermé*.

Si on a des ensembles fermés $P_1, P_2, \ldots, P_\nu, \ldots$ tels que:

$$P_1 \geqq P_2 \geqq \ldots \geqq P_\nu \geqq \ldots$$

chacun contenant au moins un point, et si P_1 est borné, il y a au moins un point commun à tous.

6. P étant un ensemble quelconque, on désigne par P^1 l'ensemble dérivé, ou dérivé d'ordre 1, de P. Nous désignerons par P^0 l'ensemble $M(P, P^1)$, et nous dirons que c'est le *dérivé d'ordre* 0 de P. On voit que P^0 comprend, outre les points de P^1, les points qui font partie de P sans faire partie de P^1, c'est-à-dire les points isolés de P. Ainsi, *un point A appartient à P^0 si toute sphère de centre A contient au moins un point de P*, et il appartient à P^1 si toute sphère de centre A contient une infinité de points de P.

L'ensemble P^0 est fermé et a pour dérivé P^1, car si un point A est limite pour P^0, c'est que toute sphère de centre A contient une infinité de points de P^0: ces points appartenant à P ou P^1, le point A fait partie de P^1; réciproquement, un point de P^1, étant limite pour P, est limite pour P^0, qui contient P.

Si un point A n'appartient pas à P^0, il y a une sphère de centre A et de rayon positif qui ne contient aucun point de P: on dit que *A est extérieur à P*.

Si P est *dense en lui-même*, on a $P \leqq P^1$; il y a donc identité entre P^0 et P^1: P^0 est *parfait*.

7.[1] Si l'on a des ensembles fermés ou nuls correspondant aux nombres des classes I et II:

$$(1) \qquad P_0, P_1, \ldots, P_\alpha, \ldots$$

avec la condition que $\alpha < \alpha'$ entraîne $P_\alpha \geqq P_{\alpha'}$, ces ensembles sont tous identiques entre eux à partir d'une certaine valeur β de α, c'est-à-dire que:

$$P_\beta = P_{\beta+1} = \ldots.$$

En désignant par P_Ω l'ensemble commun à tous les ensembles (1), on a, en outre, les résultats suivants:

[1] loc. cit., p. 103, 104, 105.

I. Si, pour tout nombre α de seconde espèce, P_α est l'ensemble commun à tous les ensembles $P_{\alpha'}$ d'indice inférieur à α, on a:

$$P_0 = \Sigma(P_\gamma - P_{\gamma+1}) + P_\Omega, \qquad \gamma = 0, 1, \ldots < \beta.$$

II. Si, outre la condition I, on a $P_\Omega = 0$, et si P_0 est borné, il y a un nombre γ tel que P_γ contient des points, $P_{\gamma+1}$ étant nul.

III. Si les ensembles (1) sont tels qu'un point isolé de l'un d'eux ne fait pas partie du suivant, P_Ω est nul ou parfait.

Ces considérations s'appliquent en particulier aux ensembles dérivés d'un ensemble quelconque P. En tenant compte de la définition donnée plus haut du dérivé d'ordre 0, on voit que P a des dérivés marqués par les nombres des classes I et II à partir de 0, et par Ω, soit

$$P^0, P^1, P^2, \ldots, P^\alpha, \ldots, P^\Omega.$$

On a

$$P^0 = \Sigma(P^\gamma - P^{\gamma+1}) + P^\Omega. \tag{2}$$

P^Ω est nul ou parfait, et les ensembles P^γ sont tous identiques à P^Ω à partir d'une certaine valeur de γ. Si, dans un domaine borné, P^Ω est nul, il y a un nombre γ tel que P^γ contient des points dans ce domaine, tandis que $P^{\gamma+1}$ y est nul: P^γ contient dans ce domaine un nombre fini de points.

Dans la formule (2), chaque terme $P^\gamma - P^{\gamma+1}$ est un ensemble isolé, par suite dénombrable, donc $\Sigma(P^\gamma - P^{\gamma+1})$ est aussi dénombrable.

8. Soit P un ensemble parfait. Désignons par Σ, soit une sphère à n dimensions, soit un parallélépipède de côtés parallèles aux axes, contenant au moins un point de P à son intérieur. Considérons l'ensemble K des points de P qui sont *intérieurs* à Σ; K est dense en lui-même, car, au voisinage de tout point A de K existent des points de P intérieurs à Σ; donc (§ 6) K^0 est parfait. D'ailleurs K^0 est contenu dans P. Nous appellerons *portion*[1] *de P déterminée par Σ* l'ensemble parfait $P_1 = K^0$;

[1] La définition actuelle diffère légèrement de la définition donnée dans les »Leçons etc.«, (p. 105), en ce qu'un point de la surface de Σ n'est ici considéré comme appartenant à la portion que *s'il est limite de points de P intérieurs à Σ*. Cela ne modifie en rien la définition des ensembles non denses.

de plus, nous conviendrons de dire que tout point de K est *intérieur à la portion P_1 de P*. D'après cela, pour qu'un point A de P soit intérieur à une portion déterminée P_1 de P, il faut et il suffit qu'il existe une sphère de centre A et de rayon positif telle que tous les points de P contenus dans cette sphère appartiennent à P_1.

Soit P un ensemble parfait, et Q un ensemble contenu dans P. Deux cas seulement sont possibles:

1° Dans toute portion P_1 de P existe une portion P_2 qui ne contient aucun point de Q, (et par suite aucun point de Q^0). Nous dirons dans ce cas que Q est *non dense* dans P.

2° Il existe une portion P_1 de P telle que toute portion P_2 de P_1 contient des points de Q. La partie de Q contenue dans P_1 est alors *partout dense* par rapport à P_1, et la partie de Q^0 contenue dans P_1 coïncide avec P_1.

On voit que, si Q est non dense dans P, on peut, au voisinage de tout point de P, trouver un point de P n'appartenant pas à Q^0, et réciproquement, si ce fait a lieu, Q est non dense.

Si Q est *fermé* et ne coincide pas avec P, il y a une portion de P qui ne contient aucun point de Q.

9.[1] En supposant toujours que Q est un ensemble contenu dans l'ensemble parfait P, nous dirons que Q est *de première catégorie par rapport à P* si Q peut être formé par la réunion d'un nombre fini ou d'une infinité *dénombrable* d'ensembles *non denses* par rapport à P.

Tout ensemble qui n'est pas de première catégorie est dit de *deuxième catégorie*.

Un ensemble contenu dans un ensemble de première catégorie est lui-même de première catégorie.

Un ensemble formé par la réunion d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles de première catégorie, est lui-même de première catégorie.

Si Q est de première catégorie dans P: 1° la partie de Q contenue dans une portion P_1 de P est de première catégorie dans P_1: 2° il y a,

[1] loc. cit., § 65, p. 105.

dans toute portion P_1 de P, des points de P qui n'appartiennent pas à Q: 3° $P - Q$ *est de deuxième catégorie.*

Dans les applications, nous aurons souvent à considérer un ensemble Q_n contenu dans un ensemble parfait P et dépendant d'un entier n de manière qu'on ait:

$$Q_1 \leqq Q_2 \leqq \ldots \leqq Q_n \leqq \ldots.$$

Soit:

$$Q = M(Q_1, Q_2, \ldots, Q_n, \ldots).$$

Nous dirons que Q est l'ensemble *limite* de Q_n. On voit que si Q_n est de première catégorie, l'ensemble limite Q l'est aussi.

La même remarque s'applique au cas d'un ensemble Q_ρ dépendant d'un nombre positif ρ, avec la condition que $\rho' < \rho$ entraîne $Q_{\rho'} \geqq Q_\rho$. Prenons une suite quelconque de nombres positifs décroissants tendant vers o: ρ_1, $\rho_2, \ldots, \rho_n, \ldots$ et soit Q l'ensemble limite de Q_{ρ_n}. On reconnaît que Q est indépendant de la suite choisie; nous dirons encore que Q est l'ensemble *limite* de Q_ρ quand ρ tend vers o. Si, pour toute valeur positive de ρ, Q_ρ est de première catégorie, il en est de même de Q.

CHAPITRE III.

Les fonctions de classe 1.

10. Supposons qu'une fonction f soit définie en tous les points d'un ensemble Γ de G_n, Γ étant *quelconque*, et f pouvant prendre toutes les valeurs de l'ensemble R' défini au § 1.

Si Γ_1 est un ensemble contenu dans Γ, f est définie aux différents points de Γ_1, l'ensemble des valeurs de f en ces points a une borne supérieure, une borne inférieure et une oscillation,[1] que nous désignons respectivement par:

$$M(f, \Gamma_1), \qquad m(f, \Gamma_1), \qquad \omega(f, \Gamma_1) = M(f, \Gamma_1) - m(f, \Gamma_1).$$

[1] On convient de poser, si a est fini:

$$+\infty - a = a - (-\infty) = +\infty - (-\infty) = +\infty,$$
$$+\infty - (+\infty) = (-\infty) - (-\infty) = 0$$

On a évidemment, si Γ_2 est contenu dans Γ_1:

$$M(f, \Gamma_1) \geqq M(f, \Gamma_2), \qquad m(f, \Gamma_1) \leqq m(f, \Gamma_2), \qquad \omega(f, \Gamma_1) \geqq \omega(f, \Gamma_2).$$

Soit maintenant A un point de Γ^0 (§ 6). En appelant Γ_ρ la partie de Γ contenue dans la sphère de centre A et de rayon ρ, on reconnaît que, lorsque ρ décroît et tend vers o, les nombres $M(f, \Gamma_\rho)$, $\omega(f, \Gamma_\rho)$ ne croissent pas, le nombre $m(f, \Gamma_\rho)$ ne décroît pas; ces trois nombres ont donc des limites, que nous désignons par:

$$M(f, \Gamma, A), \qquad m(f, \Gamma, A),$$

$$\omega(f, \Gamma, A) = M(f, \Gamma, A) - m(f, \Gamma, A) \geqq 0,$$

et que nous appelons respectivement *maximum, minimum, oscillation de f en A par rapport à Γ*.

D'après ces définitions, si un point A de Γ^0 est *intérieur* à une sphère Σ et si Γ_1 est la partie de Γ contenue dans Σ, on a:

$$M(f, \Gamma, A) < M(f, \Gamma_1); \qquad m(f, \Gamma, A) \geqq m(f, \Gamma_1); \qquad \omega(f, \Gamma, A) \leqq \omega(f, \Gamma_1).$$

11. Si f est définie au point A_0 de Γ^0, (ce qui n'a pas lieu nécessairement), on a

$$M(f, \Gamma, A_0) \geqq f(A_0).$$

Supposons qu'on ait:

$$(1) \qquad M(f, \Gamma, A_0) = f(A_0).$$

Alors, quel que soit $\varepsilon > 0$, on peut trouver un nombre positif ρ tel que, dans la sphère de centre A_0 et de rayon ρ, on ait, en tout point A de Γ:

$$f(A) < f(A_0) + \varepsilon.$$

Réciproquement, cette propriété entraîne la condition (1). Nous dirons que la fonction f est *semi-continue supérieurement en A_0 par rapport à Γ*.

De même, nous dirons que f est *semi-continue inférieurement en A_0 par rapport à Γ* si l'on a:

$$m(f, \Gamma, A_0) = f(A_0).$$

Si, au point A_0, on a:

$$M(f, \Gamma, A_0) = m(f, \Gamma, A_0) = f(A_0),$$

la fonction est *continue en A_0 par rapport à Γ*; la condition de continuité s'exprime par:

$$\omega(f, \Gamma, A_0) = 0.$$

Si une fonction f définie en tous les points d'un ensemble *fermé* P possède en chaque point de cet ensemble la semi-continuité supérieure, ou inférieure, ou la continuité, nous dirons qu'elle est *semi-continue supérieurement,* ou *inférieurement,* ou *continue* sur P. Toutefois, dans ce dernier cas, pour nous conformer aux définitions du chapitre I, la fonction ne devra être considérée comme une fonction continue proprement dite que si elle a en chaque point une valeur finie.

Si P_1 est un ensemble fermé contenu dans l'ensemble fermé P, la semi-continuité supérieure (inférieure) sur P entraîne la semi-continuité supérieure (inférieure) sur P_1.

Si f est semi-continue supérieurement, $-f$ est semi-continue inférieurement.

La somme d'un nombre fini de fonctions semi-continues supérieurement est aussi semi-continue supérieurement.

Si f définie sur l'ensemble fermé P est semi-continue supérieurement, l'ensemble H des points où l'on a: $f \geqq k$, k étant un nombre quelconque, est *fermé*. En effet, si A_0 est limite d'une suite de points en chacun desquels on a: $f \geqq k$, il en résulte: $M(f, P, A_0) \geqq k$, et par suite:

$$f(A_0) = M(f, P, A_0) \geqq k;$$

donc l'ensemble H contient tous ses points limites.

12. Soit f une fonction définie sur un ensemble Γ *quelconque*. Nous avons défini, en chaque point A de Γ^0, le nombre $M(f, \Gamma, A)$; ce nombre est donc une fonction $\varphi(A)$ définie en tout point de l'ensemble fermé Γ^0; je dis que cette fonction est *semi-continue supérieurement* sur Γ^0. En effet, soit A_0 un point de Γ^0 et ε un nombre positif; nous pouvons déterminer une sphère Σ_1 de centre A_0 telle que, Γ_1 étant la partie de Γ contenue dans cette sphère, on ait:

$$M(f, \Gamma_1) < M(f, \Gamma, A_0) + \varepsilon,$$

et par suite, si A est un point *quelconque* de Γ_1 *intérieur* à Σ_1:

$$M(f, \Gamma, A) \leqq M(f, \Gamma_1) < M(f, \Gamma, A_0) + \varepsilon,$$

d'où l'on déduit que, dans une sphère Σ_2 concentrique et intérieure à Σ_1, on a, *en tout point* de Γ:

$$\varphi(A) < \varphi(A_0) + \varepsilon.$$

C'est la propriété qui caractérise les fonctions semi-continues supérieurement.

On reconnaît de même que $\psi(A) = m(f, \Gamma, A)$ est semi-continue inférieurement sur Γ^0.

La fonction $\omega(A)$, qui est égale en chaque point A de Γ^0 à l'oscillation de f, étant la somme des fonctions $\varphi = M(f, \Gamma, A)$ et $-\psi = -m(f, \Gamma, A)$, est *semi-continue supérieurement.* Il en résulte que l'ensemble des points de Γ^0 où l'oscillation de f est $\geqq \sigma$, σ étant un nombre positif, est *fermé.*

13. Une fonction f définie en tous les points d'un ensemble *parfait* P est *ponctuellement discontinue* sur P, si, quel que soit $\sigma > 0$, l'ensemble des points A de P où $\omega(f, P, A) \geqq \sigma$ est non dense dans P; alors l'ensemble des points de discontinuité est de première catégorie; il y a, dans toute portion de P, des points de continuité; la fonction $\omega(f)$ a, dans toute portion, et par suite en tout point, son minimum nul. (Nous faisons rentrer le cas des fonctions continues dans ce cas.) Dans le cas contraire, f est *totalement discontinue;* il existe un nombre positif α et une portion Π de P telle qu'en tout point de Π on a $\omega \geqq \alpha$; on voit que $\omega(f)$ a son minimum $\geqq \alpha$ dans la portion Π.[1]

Théorème I. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction définie sur un ensemble fermé P soit de classe $\leqq 1$ est qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait contenu dans P.*[2]

[1] loc. cit., § 67, p. 108.

[2] La démonstration de ce théorème résulte des §§ 68, 73 et 74 des »Leçons sur les fonctions discontinues», où toutefois l'ensemble P est supposé parfait; mais les raisonnements des §§ 73 et 74, qui établissent que la condition est suffisante, sont valables en supposant seulement que P est fermé. L'extension du résultat, démontré d'abord pour les fonctions bornées, aux fonctions quelconques, (§ 77) peut se faire en remarquant que la condition de l'énoncé est invariante par rapport aux transformations T et T^{-1} (§ 4 du présent mémoire).

14. Une fonction semi-continue, supérieurement par exemple, sur un ensemble fermé P, est de classe $\leqq 1$.[1]

Une telle fonction a la propriété suivante. Σ étant une sphère contenant des points de P, soit $\varphi(\Sigma)$ le maximum de f dans Σ; étant donné un point A de P, et une sphère Σ de centre A dont le rayon tend vers 0, $\varphi(\Sigma)$ a pour limite $f(A)$. Nous allons établir une propriété en quelque sorte réciproque.

Soit P un ensemble fermé. Supposons qu'à chaque sphère Σ contenant des points de P corresponde un nombre $\varphi(\Sigma)$, avec la condition que si Σ' est contenu dans Σ, on ait: $\varphi(\Sigma') \leqq \varphi(\Sigma)$. Soit A_0 un point de P, et soit Σ la sphère de centre A_0 et de rayon ρ; quand ρ décroît et tend vers 0, $\varphi(\Sigma)$, qui ne croît pas, a une limite déterminée. Soit $f(A_0)$ cette limite; je dis que $f(A)$ est *semi-continue supérieurement.* En effet, soit ε un nombre positif; nous pouvons déterminer une sphère Σ de centre A_0 telle qu'on ait: $\varphi(\Sigma) < f(A_0) + \varepsilon$. Soit A un point quelconque de P intérieur à Σ, il y a une sphère de centre A contenue dans Σ, d'où il résulte qu'on a:

$$f(A) \leqq \varphi(\Sigma) < f(A_0) + \varepsilon.$$

La fonction f possède donc bien la semi-continuité supérieure.

15. Il résulte du théorème I que si une fonction n'est pas de classe $\leqq 1$, il existe un ensemble parfait sur lequel elle est totalement discontinue. *Pour démontrer qu'une fonction définie sur un ensemble fermé P est de classe $\leqq 1$, il suffira donc de démontrer que dans tout ensemble parfait H contenu dans P existe une portion sur laquelle f est de classe $\leqq 1$.* En particulier, une fonction quelconque définie sur un ensemble fermé dénombrable (autrement dit réductible) est de classe $\leqq 1$. Une fonction définie sur un ensemble fermé P est de classe $\leqq 1$ si elle est de classe $\leqq 1$ sur l'ensemble parfait P^{Ω}.

Soit f_1 une fonction de classe $\leqq 1$ définie sur un ensemble fermé P_1, f_2 une fonction de classe $\leqq 1$ sur un ensemble fermé P_2; je considère la fonction f qui est égale à f_1 en tout point de P_1, et à f_2 en tout point de P_2 qui n'appartient pas à P_1. Je dirai que f est obtenue par la *super-*

---

[1] loc cit., § 78, p. 124; même observation que plus haut.

position de f_1 à f_2; f est définie sur l'ensemble fermé $M(P_1, P_2)$. Je dis que f est de classe $\leqq 1$.

Il faut montrer que, dans tout ensemble parfait H contenu dans $M(P_1, P_2)$, existe une portion de H dans laquelle f est de classe $\leqq 1$. Posons: $H_1 = D(H, P_1)$. Ou bien H_1 coïncide avec H, et f est identique sur H à f_1, donc de classe $\leqq 1$. Ou bien H_1 ne coïncide pas avec H, et comme H_1 est fermé, il y a (§ 8) une portion K de H ne contenant aucun point de H_1 et par suite de P_1; sur K, f est identique à f_2, donc de classe $\leqq 1$.

Le théorème est donc établi; il s'étend de suite au cas de h fonctions superposées, et l'on a l'énoncé suivant: Soient $f_1, f_2, \ldots, f_h$ des fonctions de classe $\leqq 1$ respectivement définies sur les ensembles fermés $P_1, P_2, \ldots, P_h$. Prenons f égale à f_i aux points de P_i qui ne font pas partie de $P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}$. La fonction f, définie sur $M(P_1, P_2, \ldots, P_h)$, est de classe $\leqq 1$.

16. Nous nous sommes occupés, dans les § 13, 14, 15, de fonctions définies en tous les points d'un ensemble *fermé*. Nous allons maintenant, dans le cas où l'on donne une fonction sur un ensemble P *quelconque*, étudier la question suivante: à quelles conditions est-il possible de compléter la définition de f aux points de l'ensemble fermé P^0 où elle ne se trouve pas définie, de manière à obtenir une fonction F de classe 0, ou de classe $\leqq 1$, etc.? Si ce problème est possible, nous conviendrons de dire que la fonction f, *incomplètement définie sur* P^0, est de classe $0, 1, \ldots$ suivant le cas.

Le cas des fonctions continues se traite sans difficulté. Il est évidemment nécessaire, pour que f, définie sur l'ensemble P quelconque, soit de classe 0, qu'en chaque point A de P^0 on ait: $\omega(f, P, A) = 0$. Cette condition est aussi suffisante, car si elle est remplie, il suffit de poser, en tout point A de P^0:

$$F(A) = M(f, P, A) = m(f, P, A).$$

La fonction F, continue sur P^0, est identique à f sur P.

17. Pour traiter le cas des fonctions de classe 1, nous donnerons d'abord une extension aux notions rappelées au § 13.

Soit H un ensemble parfait, f se trouvant définie seulement en certains points de H, formant un ensemble Γ; l'ensemble Γ^0 est contenu dans H; nous dirons que f, au voisinage d'un point de Γ^0, se trouve définie sur H, et au voisinage d'un point de $H - \Gamma^0$, n'est pas définie. En chaque point A de Γ^0 existent des valeurs déterminées pour le maximum, le minimum et l'oscillation de f relativement à Γ; nous désignerons ces nombres par $M(f, H, A)$, $m(f, H, A)$, $\omega(f, H, A)$.

Nous dirons que f est *ponctuellement discontinue sur* H si l'ensemble des points où $\omega(f, H, A) \geqq \sigma$ $(\sigma > 0)$, est non dense dans H; sinon, f sera dite *totalement discontinue*. Cette définition comprend évidemment la définition relative au cas où f est complètement définie sur H.

Si f est ponctuellement discontinue sur H, l'ensemble K des points de discontinuité est de première catégorie par rapport à H; un point de $H - K$ est, ou bien un point de continuité pour f, ou bien un point au voisinage duquel f n'est pas définie. Si f est totalement discontinue, il y a une portion H_1 de H et un nombre positif λ tel qu'en tout point de H_1, l'oscillation de f est $\geqq \lambda$.

18. Etant donnée une fonction f sur un ensemble P quelconque, s'il existe une fonction F définie sur l'ensemble fermé P^0, égale à f sur P, et de classe $\leqq 1$, cette fonction F, d'après le théorème I, doit être ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait H contenu dans P^0: donc f doit aussi être, sur tout ensemble parfait, ponctuellement discontinue, au sens étendu du § 17. *Je dis que cette condition nécessaire est aussi suffisante.*

Supposons donc f ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait. Je vais tout d'abord déterminer, étant donné un nombre positif σ, une fonction F_0 définie en tout point de P^0, différant de f de moins de σ en tout point de P, de classe $\leqq 1$, et enfin comprise entre les bornes de f.

Définissons des ensembles fermés:

$$(1) \qquad P_0, P_1, \ldots, P_\alpha, \ldots$$

au moyen des trois conventions suivantes:

1° $P_0 = P^0$.

2° $P_{\alpha+1}$ est, quel que soit α, l'ensemble des points A de P_α^Ω où l'on a:

$$\omega(f, P_\alpha^\Omega, A) \geqq \sigma.$$

3° Si α est de deuxième espèce, P_α est l'ensemble commun à tous les ensembles d'indice inférieur à α.

On voit que, si P_α^Ω existe, f étant ponctuellement discontinue sur cet ensemble, $P_{\alpha+1}$ est non dense dans P_α^Ω, et l'on en déduit que les ensembles (1) sont nuls[1] à partir d'un certain indice β; par suite, on peut écrire:

$$P_0 = P^0 = \sum_\alpha (P_\alpha - P_{\alpha+1}) \qquad \alpha = 0, 1, \ldots, < \beta.$$

Chaque ensemble $P_\alpha - P_{\alpha+1}$ se décompose comme il suit:

$$P_\alpha - P_{\alpha+1} = \sum_\gamma (P_\alpha^\gamma - P_\alpha^{\gamma+1}) + (P_\alpha^\Omega - P_{\alpha+1}).$$

Pour définir F_0 en chaque point A de P^0, donnons-nous tout d'abord un nombre C compris entre les bornes de f, et distinguons deux cas:

1° Le point A fait partie d'un ensemble $P_\alpha^\gamma - P_\alpha^{\gamma+1}$. Ce cas se subdivise en deux:

a) f est définie en A. Nous posons: $F_0(A) = f(A)$.

b) f n'est pas définie en A. Nous posons: $F_0(A) = C$.

2° Le point A fait partie d'un ensemble $P_\alpha^\Omega - P_{\alpha+1}$. Soit Π_α l'ensemble des points de P_α^Ω où f est définie; en chaque point A de Π_α^0 existe une valeur pour $m(f, P_\alpha^\Omega, A)$. Subdivisons en deux cas:

c) A fait partie de Π_α^0. Nous posons: $F_0(A) = m(f, P_\alpha^\Omega, A)$.

d) A ne fait pas partie de Π_α^0. Nous posons: $F_0(A) = C$.

On voit que si A fait partie de Π_α, et ne fait pas partie de $P_{\alpha+1}$, ensemble des points de P_α^Ω où $\omega(f, P_\alpha^\Omega, A) \geqq \sigma$, on a:

$$M(f, P_\alpha^\Omega, A) - m(f, P_\alpha^\Omega, A) < \sigma,$$

d'où il résulte:

$$0 \leqq f(A) - F_0(A) < \sigma. \tag{2}$$

Cette condition est remplie aussi dans le cas a); elle est donc remplie en tout point où f se trouve définie. F_0 est évidemment compris entre les bornes de f. Il reste à montrer que F_0 est de classe $\leqq 1$, et pour cela (§ 15), que dans tout ensemble parfait H existe une portion sur laquelle

[1] Cf. loc. cit., § 74, p. 117.

F_0 est de classe $\leqq 1$. H étant un ensemble parfait quelconque contenu dans $P^0 = P_0$, posons: $H_\alpha = D(H, P_\alpha)$. On en déduit:

$$H_\alpha - H_{\alpha+1} = D(H, P_\alpha - P_{\alpha+1})$$

et par suite:

$$H = \sum_\alpha (H_\alpha - H_{\alpha+1}) \qquad \alpha = 0, 1, 2, \ldots, < \beta.$$

Les ensembles $H_\alpha - H_{\alpha+1}$ ne peuvent être tous nuls; soit η le plus petit des nombres pour lesquels $H_\alpha - H_{\alpha+1}$ n'est pas nul. On a:

$$H = H_0 = H_1 = \ldots = H_\eta > H_{\eta+1}.$$

De $H = H_\eta \leqq P_\eta$ on déduit: $H^\Omega \leqq P_\eta^\Omega$, et comme H est parfait:

$$H = H^\Omega \leqq P_\eta^\Omega.$$

Comme l'ensemble fermé $H_{\eta+1} = D(H, P_{\eta+1})$ ne coïncide pas avec H, il y a une portion K de H qui ne contient aucun point de $H_{\eta+1}$, par suite aucun point de $P_{\eta+1}$. L'ensemble parfait K est contenu dans P_η^Ω et ne contient aucun point de $P_{\eta+1}$; donc, d'après les définitions c) et d), F_0 est égal sur K à la constante C, sauf aux points A de l'ensemble fermé $D(\Pi_\eta^0, K)$, où F_0 est égal à $m(f, P_\eta^\Omega, A)$; cette dernière fonction est semi-continue inférieurement, par suite de classe $\leqq 1$, sur Π_η^0 et aussi sur $D(\Pi_\eta^0, K)$; ainsi F_0 est obtenu, sur K, par la superposition de cette fonction à la fonction constante C; donc (§ 15), F_0 est de classe $\leqq 1$ sur K, qui est une portion de H. Ainsi F_0 remplit toutes les conditions indiquées.

Posons, en tout point de P:

$$f = F_0 + \psi_1.$$

On a, d'après (2):

$$0 \leqq \psi_1 < \sigma.$$

La fonction ψ_1 définie sur P est ponctuellement discontinue par rapport à tout ensemble parfait H, car l'ensemble des points de discontinuité de $\psi_1 = f - F_0$, ne pouvant comprendre que des points de discontinuité de f ou de F_0, est de première catégorie par rapport à H. On peut donc appliquer la méthode précédente à ψ_1 et, remplaçant σ par $\frac{\sigma}{2}$, déterminer une fonction F_1 de classe $\leqq 1$ définie sur P^0 telle que:

$$\psi_1 = F_1 + \psi_2, \qquad 0 \leqq \psi_2 < \frac{\sigma}{2}, \qquad 0 \leqq F_1 \leqq \sigma.$$

En continuant l'application de la méthode, en obtient successivement:

$$\psi_2 = F_2 + \psi_3, \qquad 0 \leqq \psi_3 < \frac{\sigma}{2^2}, \qquad 0 \leqq F_2 < \frac{\sigma}{2},$$

$$\vdots$$

$$\psi_i = F_i + \psi_{i+1}, \qquad 0 \leqq \psi_{i+1} < \frac{\sigma}{2^i}, \qquad 0 \leqq F_i \leqq \frac{\sigma}{2^{i-1}},$$

$$\vdots$$

Les F_i sont des fonctions de classe $\leqq 1$ définies sur P^0, et forment une série uniformément convergente; donc la fonction

$$F = F_0 + F_1 + \ldots + F_i + \ldots$$

est définie sur P^0 et est de classe $\leqq 1$.

On a, en tout point de P:

$$f = F_0 + F_1 + F_2 + \ldots + F_i + \psi_{i+1},$$

et comme ψ_{i+1} tend vers 0, il en résulte: $f = F$.

En résumé, on a déterminé une fonction F de classe $\leqq 1$ sur P^0, égale à f en tout point de P, ce qui démontre la proposition énoncée.

CHAPITRE IV.

Propriété commune aux fonctions de E.

19. Soit H un ensemble parfait; supposons qu'une fonction f soit définie en tous les points de H.

Je désigne par $M'(f, H)$ la borne supérieure des nombres λ tels que l'ensemble des points de H où $f > \lambda$ est de deuxième catégorie. L'ensemble des points où $f > M' - \varepsilon$, $(\varepsilon > 0)$, est de deuxième catégorie. L'ensemble des points où $f > M' + \varepsilon$ est de première catégorie; ce dernier

ensemble, qui dépend de ε, et ne peut que s'accroître quand ε décroît, a pour limite, quand ε tend vers 0, l'ensemble des points où $f > M'$, lequel est par suite de première catégorie (§ 9). En résumé, il existe un nombre $M'(f, H)$ tel que l'ensemble des points où $f > M'(f, H)$ est de première catégorie, tandis que l'ensemble des points où $f > M'(f, H) - \varepsilon$, $(\varepsilon > 0)$ est de deuxième catégorie. Cette double propriété ne peut évidemment appartenir qu'à un seul nombre, elle caractérise donc le nombre $M'(f, H)$.

On a évidemment: $M(f, H) \geqq M'(f, H)$.

De la même manière, on voit qu'il existe un nombre déterminé $m'(f, H)$ caractérisé par ce double fait que l'ensemble des points où $f < m'(f, H)$ est de première catégorie dans H, tandis que l'ensemble des points où $f < m'(f, H) + \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ est de deuxième catégorie. On a: $m'(f, H) \geqq m(f, H)$.

Je dis qu'on a: $M'(f, H) \geqq m'(f, H)$. En effet, l'ensemble Q des points où $f > M'$ est de première catégorie; donc l'ensemble $H - Q$ est de deuxième catégorie, et en chaque point de cet ensemble, on a $f \leqq M'$. Donc, d'après la propriété caractéristique de m', on a $M' \geqq m'$.

On a donc:

$$M(f, H) \geqq M'(f, H) \geqq m'(f, H) \geqq m(f, H).$$

Posons:

$$\omega'(f, H) = M'(f, H) - m'(f, H);$$

nous aurons:

$$\omega'(f, H) \leqq \omega(f, H).$$

Nous dirons que M', m', ω', *sont le maximum, le minimum, l'oscillation de f sur H, quand on néglige les ensembles de première catégorie.* Remarquons que si P est un ensemble de première catégorie dans H, on peut, dans la définition de M', m', ω', faire complètement abstraction des valeurs de f aux points de P; de plus on a:

$$M(f, H - P) \geqq M'(f, H), \qquad m(f, H - P) \leqq m'(f, H),$$

$$\omega(f, H - P) \geqq \omega'(f, H).$$

20. Je dis que si H_1 est une *portion* (§ 8) de H, on a

$$M'(f, H_1) \leqq M'(f, H).$$

En effet, l'ensemble des points de H où $f > M'(f, H)$ est de première catégorie dans H, donc (§ 9) la partie de cet ensemble contenue dans H_1 est aussi de première catégorie dans H_1, par suite le nombre $M'(f, H_1)$ ne peut surpasser le nombre $M'(f, H)$. [1]

On a, dans les mêmes conditions:

$$m'(f, H_1) \geqq m'(f, H) \quad \text{et} \quad \omega'(f, H_1) \leqq \omega'(f, H).$$

Cela posé, soit A un point de H. Désignons par H_ρ la portion de H déterminée par la sphère Σ de centre A et de rayon ρ. Quand ρ décroît et tend vers 0, les nombres $M'(f, H_\rho)$, $\omega'(f, H_\rho)$ ne croissent pas, le nombre $m'(f, H_\rho)$ ne décroît pas; ces trois nombres ont donc des limites, que nous désignons par:

$$M'(f, H, A), \qquad m'(f, H, A), \qquad \omega'(f, H, A) = M'(f, H, A) - m'(f, H, A).$$

D'après ces définitions, si un point A de H est *intérieur* à une sphère S, et si H_1 est la portion de H déterminée par S, on a:

$$M'(f, H, A) \leqq M'(f, H_1), \qquad m'(f, H, A) \geqq m'(f, H_1),$$
$$\omega'(f, H, A) \leqq \omega'(f, H_1).$$

21. Le nombre $M'(f, H, A)$, défini en chaque point A de H, constitue une fonction φ', qui fait évidemment partie de la catégorie de fonctions étudiées au § 14. Donc φ' est semi-continue supérieurement. De même, $\psi' = m'(f, H, A)$ est semi-continue inférieurement, et enfin $\omega' = \varphi' - \psi'$ est semi-continue supérieurement.

En chaque point de H, on peut avoir $f > \varphi'$ ou bien $f \leqq \varphi'$, mais je dis que *l'ensemble des points où $f > \varphi'$ est de première catégorie dans H.*

Pour le montrer, considérons [2] l'ensemble (Δ) des cubes:

$$\frac{a_i - 1}{2^p} \leqq x_i \leqq \frac{a_i + 1}{2^p} \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

---

[1] Mais, à l'inverse de ce qui a lieu pour la fonction M, du fait qu'un ensemble parfait K est contenu dans H, ne résulte nullement la condition $M'(f, K) \leqq M'(f, H)$ Par exemple, soit $f = 0$ aux points de l'ensemble H des points du segment $(0, 1)$, sauf aux points d'un ensemble parfait non dense K, où $f = 1$. On a: $M'(f, H) = 0$ et $M'(f, K) = 1 > M'(f, H)$.

[2] loc. cit., § 61, p. 101.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ étant entiers, p étant un entier positif. Cet ensemble est dénombrable et a la propriété suivante: si A est un point, et si Σ est une sphère de centre A, il est possible de trouver un domaine Δ auquel A est intérieur et tout entier contenu dans Σ.

En désignant les domaines de (Δ) par $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_i, \ldots$, soit H_i la portion de H déterminée par Δ_i si cette portion existe; le nombre $M'(f, H_i)$ est alors déterminé, et l'ensemble K_i des points de H_i où l'on a $f > M'(f, H_i)$ est de première catégorie dans H_i, par suite dans H. L'ensemble

$$K = M(K_1, K_2, \ldots, K_i, \ldots)$$

est donc aussi de première catégorie dans H. Je dis que cet ensemble contient tous les points de H où $f > \varphi'$.

En effet, soit A un tel point. On peut poser:

$$f(A) = \varphi'(A) + \alpha, \qquad \alpha > 0.$$

Soit ε tel que: $0 < \varepsilon < \alpha$. Nous pouvons déterminer une sphère Σ de centre A telle qu'on ait, R étant la portion de H déterminée par Σ:

$$M'(f, R) < \varphi'(A) + \varepsilon,$$

et il existe un domaine de l'ensemble (Δ) auquel A est intérieur et contenu dans Σ; soit Δ_j un tel domaine; H_j est une portion de R et l'on a:

$$M'(f, H_j) \leqq M'(f, R) < \varphi'(A) + \varepsilon < \varphi'(A) + \alpha = f(A).$$

Ainsi, au point A, on a $f(A) > M'(f, H_j)$, ce qui montre que A fait partie de K_j, et par suite de K.

L'ensemble des points de H où $f > \varphi'$, étant compris dans K, est de première catégorie. Il en est de même pour l'ensemble des points où $f < \psi'$. Soit P la réunion de ces deux ensembles, on voit qu'*il y a un certain ensemble P de première catégorie dans H, tel qu'en tout point A de $H - P$, on a:*

$$\psi'(A) \leqq f(A) \leqq \varphi'(A).$$

22. La fonction φ', définie dans ce qui précède, possède, outre la semi-continuité supérieure, une propriété spéciale, que nous allons établir. Nous avons d'abord, en vertu de cette première propriété:

$$(1) \qquad \varphi'(A) = M(\varphi', A) \geqq M'(\varphi', A).$$

D'autre part, dans une sphère S de centre A déterminant une portion R de H, l'ensemble des points où $f > \varphi'$ est de première catégorie, on peut le négliger dans la définition des nombres $M'(f, R)$ et $M'(\varphi', R)$; comme en tous les autres points où f est définie, $f \leqq \varphi'$, on a:

$$M'[f, R] \leqq M'[\varphi', R].$$

En faisant tendre le rayon de S vers o, cette inégalité donne, pour les limites des deux membres:

$$(2) \qquad \varphi'(A) = M'[f, A] \leqq M'[\varphi', A].$$

De (1) et (2) résulte:

$$\varphi'(A) = M(\varphi', A) = M'(\varphi', A),$$

propriété plus particulière que la semi-continuité supérieure.

23. On a vu, dans le chapitre III, l'importance de la notion de *discontinuité ponctuelle* d'une fonction f sur un ensemble parfait H; cette propriété s'exprime par la condition que, H_1 étant une portion quelconque de H, on a:

$$m[\omega(f, H, A), H_1] = 0$$

ou encore

$$m[\omega(f, H, A), H, A] = 0$$

en tout point A de H.

D'une manière analogue, considérons une fonction f définie sur H et telle qu'on ait:

$$m[\omega'(f, H, A), H_1] = 0$$

pour toute portion H_1 de H, ou, ce qui revient au même,

$$m[\omega'(f, H, A), H, A] = 0$$

pour tout point A de H. Pour abréger, nous conviendrons de dire que f satisfait dans ce cas à la condition

$$(1) \qquad m[\omega'(f)] = 0$$

sur l'ensemble H.

Remarquons que, en vertu de la propriété exprimée par $\omega' \leqq \omega$, les fonctions *ponctuellement discontinues* sur H satisfont à la condition (1), de sorte que les fonctions de classe 0 et 1 possèdent, sur tout ensemble parfait H, la propriété (1).

Si f satisfait à la condition (1) sur H, l'ensemble fermé des points où $\omega'(f, H, A) \geqq \sigma$ $(\sigma > 0)$ est non dense dans H, car sans cela, dans une certaine portion de H, le minimum de $\omega'(f, H, A)$ serait $\geqq \sigma$; donc l'ensemble Q des points où $\omega' > 0$ est de première catégorie, et en tout point de $H - Q$, on a $\omega' = 0$, d'où $\varphi' = \psi'$.

D'autre part, d'après le § 21, en tout point de $H - P$, P étant un certain ensemble de première catégorie, on a: $\psi' \leqq f \leqq \varphi'$. L'ensemble $\Pi = M(P, Q)$ est encore de première catégorie, et, en tout point de $H - \Pi$, on a:

$$f = \varphi' = \psi'.$$

D'après cela, f, étant sur $H - \Pi$ égale à φ' et à ψ', est à la fois semi-continue supérieurement et inférieurement en tout point A de $H - \Pi$ par rapport à $H - \Pi$, c'est-à-dire continue.

En résumé, *si f satisfait sur H à $m(\omega'(f)) = 0$, il y a un ensemble de première catégorie Π tel qu'en tout point A de $H - \Pi$, f est continue par rapport à $H - \Pi$.*

24. Réciproquement, supposons cette dernière condition vérifiée. Soit A_0 un point de $H - \Pi$, et soit $\varepsilon > 0$; il y a une sphère Σ de centre A_0 telle que, dans la portion H_1 de H déterminée par Σ, on a, pour tout point A de $H - \Pi$:

$$f(A_0) - \varepsilon < f(A) < f(A_0) + \varepsilon.$$

Comme Π est de première catégorie dans H, on peut en faire abstraction dans la définition des nombres $M'(f, H_1)$, $m'(f, H_1)$, lesquels sont par suite compris entre $f(A_0) - \varepsilon$ et $f(A_0) + \varepsilon$; il en est a fortiori de même pour les nombres $\varphi'(A_0) = M'(f, H, A_0)$, et $\psi'(A_0) = m'(f, H, A_0)$ compris entre les précédents; le résultat étant vrai quel que soit ε, on a:

$$f(A_0) = \varphi'(A_0) = \psi'(A_0),$$

d'où:

$$\omega'(A_0) = 0,$$

A_0 étant un point quelconque de $H - \Pi$. Enfin, $H - \Pi$ étant densé dans toute portion de H, la fonction ω' a son minimum nul dans toute portion de H, et par suite en tout point, c'est-à-dire satisfait à la condition (1): $m(\omega'(f)) = 0$.

La fonction φ', étant semi-continue, est de classe $\leqq 1$; donc, *si f satisfait à $m(\omega'(f)) = 0$, f diffère d'une certaine fonction de classe $\leqq 1$ aux points d'un ensemble de première catégorie.*

Remarquons, en dernier lieu, que la condition (1) est invariante par rapport aux transformations T et T^{-1} du § 4; cela résulte de ce que, si A est un point de $H - \Pi$ où f est continue par rapport à $H - \Pi$, la transformée de f par T ou par T^{-1} a la même propriété.

25. Nous allons démontrer que *la condition $m(\omega'(f)) = 0$ se conserve à la limite*, c'est-à-dire qu'on a le théorème suivant:

Théorème. *Si, sur un ensemble parfait P, une suite de fonctions f_1, $f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ a une limite f, et si chacune des fonctions f_i satisfait à la condition $m(\omega'(f_i)) = 0$, il en est de même de f.*

Dans la démonstration de ce théorème, nous supposerons que les fonctions f_i et f sont *finies*, ce qui n'enlèvera rien à la généralité du résultat.

Tout revient à montrer que l'hypothèse contraire à l'énoncé conduit à une contradiction; cette hypothèse est qu'il existe une portion H de P dans laquelle on a:

$$m[\omega'(f, P, A), H] > 0. \tag{2}$$

Prenons deux nombres λ et μ tels qu'on ait:

$$m[\omega'(f, P, A), H] > 2\lambda > 2\mu > 0$$

et posons:

$$\lambda = \mu + 4\varepsilon, \qquad (\varepsilon > 0). \tag{3}$$

Pour toute portion H' de H, on a:

$$\omega'(f, H') > 2\lambda. \tag{4}$$

D'autre part, à la fonction f_i correspond un ensemble Π_i de première catégorie dans H tel qu'en tout point de $H - \Pi_i$, f_i est continue par rapport à $H - \Pi_i$. Si l'on pose: $\Pi = M(\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_i, \ldots)$, l'ensemble Π est de

première catégorie; quel que soit i et quel que soit le point A de $H - \Pi$ (qui est contenu dans tous les $H - \Pi_i$), *f_i est continue en A par rapport à $H - \Pi$.*

Cela posé, soit p un entier, et soit H_1 une portion quelconque de H, déterminée par une sphère Σ_1. L'ensemble $H - \Pi$ étant partout dense dans H, on peut choisir un point A_0 qui fasse partie de $H - \Pi$ et soit *intérieur à* Σ_1. Comme on a: $\lim f_\nu(A_0) = f(A_0)$, on peut déterminer un entier $\alpha > p$ tel que:

$$|f_\alpha(A_0) - f(A_0)| < \varepsilon. \tag{5}$$

La fonction f_α étant continue en A_0 par rapport à $H - \Pi$, on peut trouver une sphère Σ_2 de centre A_0, contenue dans Σ_1, telle que, A étant un point quelconque de $H - \Pi$ intérieur à Σ_2, on ait:

$$|f_\alpha(A) - f_\alpha(A_0)| < \varepsilon. \tag{6}$$

Prenons une sphère Σ_3 de centre A_0 et intérieure à Σ_2, et soit H_3 la portion de H déterminée par Σ_3. D'après (4), on a: $\omega'(f, H_3) > 2\lambda$.

Or, si l'on pose: $Q = D(H - \Pi, H_3)$, on a, d'après une remarque du § 19:

$$\omega(f, Q) \geqq \omega'(f, H_3) > 2\lambda.$$

Les valeurs de f aux points de Q forment donc un ensemble dont l'oscillation surpasse 2λ; donc, d'après un lemme connu,[1] l'une de ces valeurs diffère du nombre $f(A_0)$ de plus de λ, c'est-à-dire qu'on peut trouver un point A_1 de Q tel que:

$$|f(A_1) - f(A_0)| > \lambda. \tag{7}$$

On a: $\lim f_\nu(A_1) = f(A_1)$; on peut donc choisir un entier $\beta > p$ tel que:

$$|f_\beta(A_1) - f(A_1)| < \varepsilon. \tag{8}$$

Enfin, A_1, qui appartient à Q, par suite à Σ_3, est intérieur à Σ_2, et appartient aussi à $H - \Pi$; f_β est donc continue en A_1 par rapport à $H - \Pi$; déterminons une sphère Σ_4 de centre A_1, contenue dans Σ_2, et telle que, A étant un point quelconque de $H - \Pi$ contenu dans Σ_4, on ait:

$$|f_\beta(A) - f_\beta(A_1)| < \varepsilon. \tag{9}$$

[1] loc. cit., p. 80.

Comme Σ_4 est contenu dans Σ_2, le même point A vérifie aussi la relation (6).

En combinant, d'une part (5) et (6), d'autre part (8) et (9), on trouve:

$$|f_\alpha(A) - f(A_0)| < 2\varepsilon, \qquad |f_\beta(A) - f(A_1)| < 2\varepsilon,$$

inégalités qui, combinées avec (7):

$$|f(A_1) - f(A_0)| > \lambda = \mu + 4\varepsilon,$$

donnent, *pour tout point A de $H - \Pi$ contenu dans Σ_4*:

$$(10) \qquad |f_\alpha(A) - f_\beta(A)| > \mu,$$

et par suite, comme α et β sont supérieurs à p:

$$(11) \qquad \omega[f_p(A), f_{p+1}(A), \ldots] > \mu.$$

Ainsi, p étant donné, toute portion H_1 de H contient une portion dont tous les points, sauf peut-être ceux de Π, satisfont à (11). Par suite, l'ensemble K_p des points de H qui ne satisfont pas à (11), se compose d'un ensemble non dense dans H et d'un ensemble compris dans Π, donc est de première catégorie. Donnons à p toutes les valeurs possibles, et soit:

$$K = M(K_1, K_2, \ldots, K_p, \ldots).$$

K est de première catégorie par rapport à H. L'ensemble complémentaire $H - K$ contient donc effectivement des points, lesquels ne font partie d'aucun des ensembles K_p; si A est l'un de ces points, A satisfait à (11), quel que soit p, ce qui est contradictoire avec le fait que $f_\nu(A)$ tend vers une limite finie.

Ainsi, l'hypothèse (2) conduit à une contradiction.

On a donc, dans toute portion H de P:

$$m[\omega'(f, P, A), H] = 0.$$

Autrement dit, la condition $m(\omega'(f)) = 0$ se conserve à la limite.

26. Cette propriété appartient à toutes les fonctions de l'ensemble E défini au § 1. En effet, elle appartient aux fonctions des classes 0 et 1; supposons établi qu'elle appartient à toutes les fonctions de classes inférieures à α, et montrons qu'elle appartient aussi aux fonctions de classe

α. Soit f une fonction de classe α; il existe une suite $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ tendant vers f, chaque fonction f_ν appartenant à une classe $< \alpha$, et par suite satisfaisant à $m[\omega'(f_\nu)] = 0$. Donc la fonction $f = \lim f_\nu$ satisfait à la même condition.

D'après cela, on serait assuré qu'une fonction f n'appartient pas à l'ensemble E si, sur un certain ensemble parfait H, f satisfaisait à la condition: $m[\omega'(f, H, A), H] > 0$. Par exemple, si l'on pouvait partager H en deux ensembles K et $H - K$ qui, dans chaque portion de H, seraient tous deux de deuxième catégorie, en posant $f = 0$ sur H, $f = 1$ sur $H - K$, on aurait, dans toute portion, et par suite en tout point de H: $M' = 1$, $m' = 0$, d'où $\omega' = 1$, et f ne ferait pas partie de E.

CHAPITRE V.

Premières recherches sur les fonctions de classes 2 et 3.

27. Abordons maintenant la recherche des conditions suffisantes pour qu'une fonction f définie sur un ensemble fermé P de l'espace à n dimensions soit de classe $2, 3, \ldots$. D'après les résultats du chapitre précédent, nous devons nous borner à considérer des fonctions satisfaisant, sur tout ensemble parfait, à la condition $m(\omega'(f)) = 0$, puisque ce sont les seules qui appartiennent à l'ensemble E. D'un autre côté, d'après le § 15, une fonction f définie aux points d'un ensemble fermé P est de classe $\leqq 1$ si elle est de classe $\leqq 1$ sur l'ensemble parfait P^Ω; a fortiori, f est de classe $\leqq \alpha$ $(\alpha > 1)$ sur P si elle est de classe $\leqq \alpha$ sur P^Ω; nous pouvons donc, dans la suite, nous borner à considérer des fonctions définies sur un ensemble *parfait*.

Soit donc f définie sur l'ensemble parfait P et satisfaisant à la condition: $m[\omega'(f)] = 0$ sur P. D'après le § 24, il existe sur P une fonction φ de classe $\leqq 1$ telle que f ne diffère de φ qu'aux points d'un ensemble de première catégorie K. Soit $K = M(K_1, K_2, \ldots, K_i, \ldots)$, les K_i étant non denses dans P. Remplaçons chaque ensemble K_i par son dérivé d'ordre 0, K_i^0, qui est aussi non dense dans P, de plus, est fermé, et contient K_i, de sorte que si $K' = M(K_1^0, K_2^0, \ldots, K_i^0, \ldots)$, on a $f = \varphi$ en tout point

de $P - K'$. Chaque ensemble K_i^0 se compose de l'ensemble parfait K_i^Ω (s'il existe), plus un ensemble dénombrable, soit H_i. Posons:

$$H = M(H_1, \ldots, H_i, \ldots) \quad \text{et} \quad K'' = M(K_1^\Omega, \ldots, K_i^\Omega, \ldots).$$

On a:

$$K' = M(K'', H)$$

et H est dénombrable. En résumé, *on peut supposer que l'ensemble de première catégorie K tel que $f = \varphi$ aux points de $P - K$ se compose d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits, plus un ensemble dénombrable.* Nous sommes conduits à étudier f sur chacun des ensembles K_i^0, et pour cela sur chacun des ensembles parfaits K_i^Ω.

Nous devons supposer que f satisfait sur K_i^Ω à la condition $m(\omega'(f)) = 0$, de telle sorte qu'on peut déterminer une fonction φ_i de première classe sur K_i^Ω et une infinité dénombrable d'ensembles fermés et non denses dans K_i^Ω, soit $K_{i1}, K_{i2}, \ldots, K_{ij}, \ldots$, avec la condition que $f = \varphi_i$ en tout point de K_i^Ω qui n'appartient pas à l'un des ensembles K_{ij}. On sera conduit ensuite à étudier f sur les ensembles K_{ij}^Ω, et à introduire de nouveaux ensembles non denses par rapport aux ensembles K_{ij}^Ω, et ainsi de suite.

Pour montrer l'utilité de ce procédé, démontrons d'abord un théorème qui nous permettra de définir des fonctions de classe 2.

28. **Théorème.** Soit P_0 un ensemble fermé, et $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots$ une infinité dénombrable d'ensembles fermés tous contenus dans P_0; soit f_0 une fonction définie sur P_0 et de classe $\leqq 2$, et $f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots$ des fonctions respectivement définies sur $P_1, P_2, \ldots, P_i, \ldots$ et toutes de classes $\leqq 2$. La fonction f qui est égale à f_1 sur P_1, à f_i $(i = 2, 3, \ldots)$ aux points de P_i qui ne font partie d'aucun des ensembles $P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}$, enfin à f_0 sur les points de P_0 qui ne font partie d'aucun des ensembles $P_1, P_2, \ldots$, est de classe $\leqq 2$ sur P_0.

En effet, d'après les hypothèses de l'énoncé, h étant un quelconque des nombres $0, 1, 2, \ldots, i, \ldots$, f_h est de classe $\leqq 2$ sur P_h. Il y a donc une suite de fonctions de classe $\leqq 1$ tendant vers f_h, soit:

$$f_{1,h}, f_{2,h}, \ldots, f_{j,h}, \ldots.$$

En tout point A de P_h, on a: $\lim\limits_{j=\infty} f_{jh}(A) = f_h(A)$.

Cela posé, définissons des fonctions φ_ν ($\nu = 1, 2, \ldots$) de la manière suivante: φ_ν est égale à $f_{\nu,1}$ sur P_1, à $f_{\nu,h}$ ($h = 2, 3, \ldots, \nu$) sur les points de P_h qui n'appartiennent à aucun des ensembles $P_1, P_2, \ldots, P_{h-1}$, enfin à $f_{\nu,0}$ sur les points de P_0 qui n'appartiennent à aucun des ensembles P_1, $P_2, \ldots, P_\nu$. La fonction φ_ν, qui est ainsi définie sur P_0, est de classe $\leqq 1$, d'après le § 15, car elle est obtenue par superposition des fonctions de classe $\leqq 1$: $f_{\nu,1}, f_{\nu,2}, \ldots, f_{\nu,\nu}, f_{\nu,0}$. Je dis en outre qu'on a: $\lim \varphi_\nu = f$.

En effet, soit A un point de P_0. Si A fait partie d'un des ensembles $P_1, P_2, \ldots$, soit i le plus petit indice tel que A appartient à P_i; alors A n'appartient à aucun des ensembles $P_1, P_2, \ldots, P_{i-1}$ (dans l'hypothèse $i > 1$). D'après la définition de φ_ν, dès que $\nu \geqq i$, on a: $\varphi_\nu(A) = f_{\nu,i}(A)$. On a donc: $\lim\limits_{\nu=\infty} \varphi_\nu(A) = \lim\limits_{\nu=\infty} f_{\nu,i}(A) = f_i(A)$; or, d'après la définition de f, on a aussi $f(A) = f_i(A)$; donc $\lim\limits_{\nu=\infty} \varphi_\nu(A) = f(A)$.

Si A ne fait partie d'aucun des ensembles $P_1, P_2, \ldots$, on a, quel que soit ν: $\varphi_\nu(A) = f_{\nu,0}(A)$; donc, on a: $\lim\limits_{\nu=\infty} \varphi_\nu(A) = \lim\limits_{\nu=\infty} f_{\nu,0}(A) = f_0(A)$; on a aussi, d'autre part, $f(A) = f_0(A)$, par suite $\lim \varphi_\nu(A) = f(A)$.

En résumé, f est la limite de φ_ν, qui est de classe $\leqq 1$, donc f est de classe $\leqq 2$.

29. Indiquons des cas particuliers de la proposition générale qui précède.

Si f_0 est de classe $\leqq 2$ sur l'ensemble fermé P_0, la fonction f obtenue en remplaçant par des valeurs arbitraires les valeurs de f_0 aux points d'un ensemble *dénombrable* Q est de classe $\leqq 2$. En effet, soient $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots$ les points de Q; il suffit d'appliquer la proposition du § 28 en prenant $P_i = A_i$, et $f_i = f$. La proposition est vraie a fortiori si f_0 est de classe $\leqq 1$. On peut aussi conclure de ce qui précède que *si R est un ensemble dénombrable, la classe α d'une fonction f ne dépend pas de ses valeurs aux points de R, dès que $\alpha \geqq 2$.*

Reprenons maintenant le procédé du § 27. Partons d'une fonction f satisfaisant sur l'ensemble parfait P_0 à la condition $m[\omega'(f)] = 0$. Il existe, d'une part une fonction φ_0 de classe $\leqq 1$, d'autre part un ensemble de première catégorie dans P_0, soit P_1, tel qu'en tout point de $P_0 - P_1$, on a $f = \varphi_0$; de plus, d'après une remarque du § 27, on peut supposer que P_1 se compose d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits

non denses dans P_0, soit $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$, plus un ensemble dénombrable. Si f se trouve être de classe $\leqq 1$ sur chacun des ensembles p_i, l'application du théorème du § 28 (en remplaçant f_0 par φ_0, et tous les f_i $(i > 0)$ par f) montre que f est de classe $\leqq 2$ sur P'_0.

Sinon, nous traiterons chaque ensemble parfait p_i comme nous avons traité P'_0; nous définissons donc une fonction φ_i de classe $\leqq 1$ sur p_i, et un ensemble de première catégorie dans p_i, soit p'_i, tel que $f = \varphi_i$ en tout point de $p_i - p'_i$; en outre, p'_i se compose d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits non denses dans p_i, soit: $p_{i,1}, p_{i,2}, \ldots, p_{i,j}, \ldots$, plus un ensemble dénombrable. Soit P'_2 l'ensemble formé par la réunion de tous les ensembles à deux indices $p_{i,j}$. Supposons que f soit de classe $\leqq 1$ sur chacun des ensembles $p_{i,j}$; alors f est de classe $\leqq 2$ sur chacun des ensembles p_i, d'après le § 28; ce point étant établi, on voit, par une seconde application du même théorème, que f est de classe $\leqq 2$ sur P_0.

Si les conditions précédentes ne sont pas remplies, c'est-à-dire si f n'est pas de classe $\leqq 1$ sur chacun des ensembles $p_{i,j}$, nous serons conduits à continuer l'application du procédé précédent; nous introduirons donc des fonctions $\varphi_{i,j}$ de classe $\leqq 1$ et des ensembles à trois indices $p_{i,j,k}$, puis s'il y a lieu, des fonctions $\varphi_{i,j,k}$, et des ensembles $p_{i,j,k,l}$. D'une manière générale, si nous avons été conduits à introduire l'ensemble parfait $p_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$, et si f n'est pas de classe $\leqq 1$ sur cet ensemble, comme f satisfait sur cet ensemble à la condition $m[\omega'(f)] = 0$, il y a une fonction $\varphi_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$ de classe $\leqq 1$ sur $p_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$, et un ensemble de première catégorie par rapport à $p_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$, soit $p'_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$, tel qu'on a: $f = \varphi_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$ en tout point de $p_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha} - p'_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$. L'ensemble $p'_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$ se compose, outre un certain ensemble dénombrable, d'une infinité dénombrable d'ensembles parfaits non denses dans $p_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha}$; nous les désignons par $p_{i_1,i_2,\ldots,i_\alpha,i_{\alpha+1}}$, l'indice $i_{\alpha+1}$ prenant les valeurs $1, 2, \ldots$. Désignons par P_α l'ensemble formé par la réunion des ensembles p à α indices.

Cela posé, si, par l'application du procédé dont la loi vient d'être indiquée, nous obtenons un ensemble P_h tel que f soit de classe $\leqq 1$ sur chacun des ensembles $p_{i_1,i_2,\ldots,i_h}$, dont se compose P_h, je dis que f est de classe $\leqq 2$ sur P_0. Il suffit en effet, pour le faire voir, d'appliquer successivement le théorème du § 28, d'abord à chacun des ensembles à $h - 1$ indices, ce qui montre que f est de classe $\leqq 2$ sur chacun de ces ensembles,

puis ensuite à chacun des ensembles à $h-2$ indices, et ainsi de suite en remontant jusqu'à chacun des ensembles $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$ et finalement à P_0.

30. Nous allons, pour éclaircir les généralités exposées dans ce qui précède, les appliquer à des exemples. Nous nous bornerons tout d'abord, pour plus de simplicité, à étudier des fonctions d'une seule variable x définies dans le champ $0 \leqq x \leqq 1$.

Je rappelle d'abord des résultats relatifs à la notion d'ensemble parfait non dense par rapport à un continu linéaire.[1]

Si P est un ensemble parfait non dense dans le segment de droite AB, il existe, sur AB, une infinité dénombrable d'intervalles, que j'appelle contigus à P, qui n'ont deux à deux aucun point commun, et tels que l'ensemble $AB-P$ est constitué par les points intérieurs à ces intervalles. L'ensemble P contient des points de deux sortes: 1° les points e, extrémités des intervalles contigus à P; 2° les points l, dont chacun est extérieur à tous ces intervalles. Chaque point de P, qu'il soit e ou l, est limite de points des deux catégories; mais, tandis qu'il y a, au voisinage d'un point l, des points de P, *à gauche et à droite de ce point,*[2] il n'y a, au voisinage d'un point e, de points de P que *d'un seul côté.* L'ensemble des points e est dénombrable.

31. Rappelons d'autre part certaines propriétés relatives à la représentation des nombres par des fractions continues, limitées ou illimitées. Nous poserons;

$$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{\ddots}{\ddots\, \cfrac{1}{a_\nu+\ddots}}}} = (a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots);$$

chaque nombre a_ν est un entier positif; les quotients incomplets $a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots$ sont en nombre fini, ou en nombre infini.

Un nombre irrationnel de l'intervalle $(0, 1)$ est représentable d'une manière bien déterminée par une fraction continue illimitée $(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots)$

[1] loc. cit., Ch. III, section II.

[2] Sauf dans le cas où le point coincide avec A ou B, extrémités du segment AB.

et réciproquement, de telle sorte qu'il y a une correspondance biunivoque et réciproque entre l'ensemble des nombres irrationnels du segment $(0, 1)$ et l'ensemble des suites infinies d'entiers positifs $(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots)$.

Un nombre rationnel de l'intervalle $(0, 1)$ [les nombres 0 et 1 étant mis à part], est représentable d'une manière bien déterminée par une fraction continue limitée dont le dernier quotient est > 1; mais, si on supprime cette restriction, il y a, pour tout nombre rationnel, deux représentations possibles, car on a, si $a_p > 1$:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, a_p) = (a_1, a_2, \ldots, a_{p-1}, a_p - 1, 1).$$

Étant donné un système de h entiers positifs rangés dans un ordre déterminé, soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$, tous les nombres représentables par des fractions continues, limitées ou illimitées, commençant par $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$, sont compris dans la formule

$$x = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_h + y}}} \qquad \text{avec} \quad 0 \leqq y \leqq 1.$$

Ils forment donc, dans le segment représentatif $(0, 1)$, un intervalle continu, points extrêmes compris, que je désigne par $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$, et dont les extrémités sont les deux points rationnels:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h) \quad \text{et} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, 1).$$

Pour tout point intérieur à l'intervalle, on a: $0 < y < 1$, de sorte que la représentation d'un point *intérieur* à cet intervalle commence toujours par $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$.

Soit A un point rationnel, admettant les deux représentations:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}, a_h) = (a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}, a_h - 1, 1) \quad [a_h > 1].$$

Le point A est l'extrémité commune des deux intervalles:

$$I(a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}, a_h) \quad \text{et} \quad I(a_1, a_2, \ldots, a_{h-1}, a_h - 1, 1),$$

et ces deux intervalles sont situés de part et d'autre de A.

Soit B un point irrationnel, représenté par la fraction:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots).$$

Le point B est *intérieur* à chacun des intervalles:

$$I(a_1)\ ,\ I(a_1\ ,\ a_2)\ ,\ \ldots\ ,\ I(a_1\ ,\ a_2\ ,\ \ldots\ ,\ a_\nu)\ ,\ \ldots$$

dont chacun est contenu dans le précédent, et c'est le seul point contenu dans tous ces intervalles.

Enfin, étant donnée une fraction continue, limitée ou illimitée, si on y remplace le quotient incomplet d'ordre h par un nombre plus grand, on augmente ou on diminue le nombre représenté suivant que h est pair ou impair.

32. Cela posé, donnons-nous d'une part un entier positif n, d'autre part un système de h entiers positifs dans un ordre donné, soit $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$; je me propose d'étudier *l'ensemble Q des points représentables par des fractions continues limitées ou illimitées commençant par $(\alpha_1\ ,\ \alpha_2\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha_h)$, chacun des quotients suivants, s'il existe, étant $> n$.*

Tout d'abord, l'ensemble Q est évidemment compris dans l'intervalle $I(\alpha_1\ ,\ \alpha_2\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha_h)$, de sorte que tout point, rationnel ou irrationnel, qui est en dehors de cet intervalle, ne fait pas partie de Q, et n'est pas point limite pour Q.

Étudions maintenant les points de cet intervalle, et en premier lieu, les points rationnels. En mettant à part pour l'instant les deux points extrêmes, tout point rationnel A de l'intervalle $I(\alpha_1\ ,\ \alpha_2\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha_h)$ admet une représentation de la forme:

$$(\alpha_1\ ,\ \alpha_2\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha_h\ ,\ \beta_{h+1}\ ,\ \ldots\ ,\ \beta_k) \quad \text{avec} \quad k > h \quad \text{et} \quad \beta_k > 1\,.$$

Le point A est donc l'extrémité commune de deux intervalles situés de part et d'autre de lui, savoir:

$$I_1 = I(\alpha_1\ ,\ \alpha_2\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha_h\ ,\ \beta_{h+1}\ ,\ \ldots\ ,\ \beta_k)$$

et

$$I_2 = I(\alpha_1\ ,\ \alpha_2\ ,\ \ldots\ ,\ \alpha_h\ ,\ \beta_{h+1}\ ,\ \ldots\ ,\ \beta_{k-1}\ ,\ \beta_k - 1\ ,\ 1).$$

Un point *intérieur* à l'intervalle I_2 ne peut, dans aucun cas, faire partie de Q, car la fraction qui représente un tel point contient nécessairement un quotient $\leqq n$, à savoir le quotient de rang $k+1$, qui est égal à 1.

En ce qui concerne I_1, deux cas sont à distinguer. Si A *ne fait pas partie de* Q, c'est que l'un des nombres $\beta_{h+1}\ ,\ \ldots\ ,\ \beta_k$ est $\leqq n$; alors, pour

tout point intérieur à I_1, il y a un quotient incomplet $\leqq n$, tous ces points sont donc en dehors de Q, de sorte que le point A est *extérieur à Q* (§ 6). Si au contraire *A fait partie de Q*, les nombres $\beta_{h+1}, \ldots \beta_k$, sont supérieurs à n; considérons alors les points:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_{h+1}, \ldots, \beta_k, \gamma)$$

où γ reçoit des valeurs supérieures à n et croissant indéfiniment, nous obtenons ainsi une suite de points distincts de A, qui appartiennent à Q et *qui tendent vers A; donc A est point limite pour Q, mais d'un seul côté.*

Nous avons laissé de côté les extrémités de l'intervalle $I(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_h)$. Le point B: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$, *fait partie de Q*; il est, d'une part, extrémité de l'intervalle $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h - 1, 1)$ si $\alpha_h > 1$ ou $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h-1} + 1)$ si $\alpha_h = 1$, dont aucun point intérieur ne fait partie de Q; d'autre part, il est limite de la suite de points de Q représentés par $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \gamma)$, où γ croît indéfiniment, de sorte que *B est limite pour Q, mais d'un seul côté.* Quant au point $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, 1)$, *il ne fait pas partie de Q*, et comme il est l'extrémité des deux intervalles

$$I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, 1) \quad \text{et} \quad I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h-1}, \alpha_h + 1),$$

dont aucun point intérieur ne fait partie de Q, il est *extérieur à Q.* On a, en résumé, les résultats suivants, concernant les points rationnels du segment $(0, 1)$:

1° *Tout point rationnel de Q est limite pour Q, d'un seul côté.*

2° *Tout point rationnel qui ne fait pas partie de Q est extérieur à Q.*

Passons maintenant aux points irrationnels de l'intervalle $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$. Si C est un point irrationnel *ne faisant pas partie de Q*, la fraction correspondante est de la forme:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_{h+1}, \ldots, \beta_k, \ldots)$$

avec la condition qu'un certain quotient β, soit β_k, est $\leqq n$. Dans ces conditions, tous les points intérieurs à l'intervalle $I(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_{h+1}, \ldots, \beta_k)$, auquel C est intérieur, sont en dehors de Q; donc C est *extérieur à Q.*

Si D est un *point irrationnel de Q*, la fraction correspondante est de la forme:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_{h+1}, \beta_{h+2}, \ldots, \beta_k, \ldots),$$

tous les β étant supérieurs à n. On obtiendra un autre point de Q en remplaçant un quelconque des nombres β, soit β_r, par un nombre supérieur; en prenant r assez grand, et successivement pair ou impair, ce nouveau point pourra être pris d'un côté ou d'autre de D, et aussi voisin qu'on voudra de D. Donc D est *limite pour* Q, et *des deux côtés*. En résumé:

3° *Tout point irrationnel de Q est limite pour Q, des deux côtés.*

4° *Tout point irrationnel qui ne fait pas partie de Q est extérieur à Q.*

Tirons maintenant des conclusions des propositions 1°, 2°, 3°, 4°. D'après 2° et 4°, tout point qui ne fait pas partie de Q est extérieur à Q, donc Q est *fermé*. D'après 1° et 3°, tout point de Q est limite pour Q, donc Q, qui est fermé, est *parfait*. D'après 1° et 2°, il y a, au voisinage de tout point rationnel, par suite dans toute portion du continu, un intervalle qui ne contient aucun point de Q, c'est-à-dire que Q est *non dense* par rapport au continu.

Ainsi, *Q est un ensemble parfait non dense dans le continu linéaire;* d'après le § 30, les points de Q sont de deux sortes, les points e, et les points l; d'après 1°, tout point rationnel de Q est un point e; d'après 3°, tout point irrationnel de Q est un point l; il en résulte que réciproquement tous les points e de Q sont rationnels, tous les points l de Q sont irrationnels. En résumé, on a la proposition suivante:

L'ensemble des points représentables par des fractions continues limitées ou illimitées commençant par $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$, les autres quotients étant supérieurs à n, est un ensemble parfait non dense, et ceux de ces points qui sont irrationnels constituent les points l de cet ensemble.

Nous désignerons dans la suite cet ensemble par $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$, et l'ensemble de ses points l par $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$.

33. Supposons qu'on donne à n une valeur fixe, et qu'on fasse varier de toutes les manières possibles les entiers h, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$. On obtient ainsi une infinité dénombrable d'ensembles $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$. Je désigne par P_n l'ensemble formé par la réunion de tous les $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$ correspondants. On reconnaît que:

Tout point de P_n est un point irrationnel représentable par une fraction continue dont tous les quotients incomplets surpassent n, à partir d'un

certain rang; et réciproquement, un point qui remplit ces conditions appartient à P_n.

Un point déterminé de P_n appartient évidemment à une infinité d'ensembles $p^{(n)}$, car soit $(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots)$ ce point, les quotients de rang supérieur à ν étant supérieurs à n; le point fait partie de tous les ensembles $p^{(n)}[a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots, a_{\nu+k}]$, quel que soit k. Mais, comme nous allons le montrer, il est possible de choisir parmi les ensembles $p^{(n)}$, une série déterminée, dont la réunion constituera P_n, et telle qu'un point donné de P_n fasse partie d'un seul ensemble de cette série. De plus, en vue d'applications ultérieures, nous nous astreindrons à ce que, dans chaque ensemble de cette série, le nombre h des quotients incomplets qui ont des valeurs fixes soit au moins égal à n.

Prenons, parmi les ensembles $q^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h)$:

1° ceux d'entre eux pour lesquels $h = n$, les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ prenant toutes les valeurs possibles.

2° ceux pour lesquels $h > n$, avec la condition $\alpha_h \leqq n$.

Appelons, pour abréger, *ensembles normaux* $q^{(n)}$ les ensembles $q^{(n)}$ qui viennent d'être définis, et *ensembles normaux* $p^{(n)}$ les $p^{(n)}$ correspondants.

Je dis qu'*un point déterminé A de P_n appartient à un et un seul ensemble normal $p^{(n)}$.* En effet, soit $(a_1, a_2, \ldots)$ ce point. Le seul ensemble $q^{(n)}$ qui remplit l'une des conditions 1° ou 2° et qui contient A est l'ensemble $q^{(n)}[a_1, a_2, \ldots, a_h]$, h étant le plus petit nombre supérieur ou égal à n, tel que tous les a de rang supérieur à h soient supérieurs à n.

D'après cela, deux ensembles normaux $p^{(n)}$ distincts n'ont aucun point commun, deux ensembles normaux $q^{(n)}$ distincts ne peuvent avoir en commun que des points rationnels.

34. D'après la propriété caractéristique des points de P_n, il est évident que P_{n+1} est contenu dans P_n. D'une manière plus détaillée, étudions la disposition d'un ensemble normal de P_{n+1} par rapport aux ensembles normaux de P_n.

Soit $q^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$ un ensemble normal $q^{(n+1)}$; on a:

$$\text{soit} \quad k = n + 1, \quad \text{soit} \quad k > n + 1, \quad \text{avec} \quad \alpha_k \leqq n + 1.$$

Si les nombres $\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_k$, sont tous supérieurs à n, posons: $h = n$; sinon, certains d'entre eux étant inférieurs ou égaux à n, prenons, parmi

ces derniers, celui qui a le rang le plus élevé, et désignons par h ce rang. Ainsi, on a, soit $h = n$, soit $h > n$, avec $\alpha_h \leqq n$, de sorte que l'ensemble $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$ est normal; de plus, les nombres $\alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_k$ (si $k > h$) sont supérieurs à n. Par suite, tout point de $q^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \ldots, \alpha_k]$ possède la propriété caractéristique des points de $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$. Donc *tout ensemble normal $q^{(n+1)}$ est contenu dans un certain ensemble normal $q^{(n)}$*, lequel est unique, car un ensemble normal $q^{(n)}$ autre que $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$, n'ayant en commun avec cet ensemble que des points rationnels, ne peut contenir $q^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \ldots, \alpha_k]$.

Je dis que *l'ensemble $q^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$ est non dense dans $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$*. Pour le démontrer, si nous tenons compte d'une part de ce fait que l'ensemble $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$ a pour dérivé $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$ et est donc dense par rapport à lui, d'autre part de ce que $q^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$ est parfait, par suite fermé, il suffit (cf. § 8) de faire voir qu'au voisinage de tout point de $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$ existe un point qui fait partie de $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$ sans faire partie de $q^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$. Or, soit A un point de $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_{h+1}, \beta_{h+2}, \ldots).$$

Considérons, j étant un entier arbitraire, le point B:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_{h+1}, \beta_{h+2}, \ldots, \beta_{h+j}, n+1, n+1, \ldots)$$

dans lequel tous les quotients qui suivent celui de rang $h+j$ sont égaux à $n+1$. Ce point appartient bien à $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$, puisque les quotients de rang $> h$ sont $> n$, mais il n'appartient pas à P_{n+1}, puisqu'il y a une infinité de quotients égaux à $n+1$; donc il n'appartient pas à $p^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$, et, étant irrationnel, n'appartient pas non plus à $q^{(n+1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k]$. De plus, en prenant j assez grand, le point B peut être pris aussi près qu'on veut du point A. La proposition est donc démontrée.

Cela posé, modifiant les notations précédentes, nous supposerons qu'on ait rangé d'abord les ensembles normaux $q^{(1)}$ dans un ordre déterminé, et nous les désignerons par la notation $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_i, \ldots$. Chacun des ensembles normaux $q^{(2)}$ appartient à un et un seul des ensembles normaux $q^{(1)}$; considérons ceux des ensembles normaux $q^{(2)}$ qui sont contenus dans q_i; il y en a une infinité dénombrable; nous supposerons qu'on les ait

rangés dans un ordre déterminé, et nous les désignerons par $q_{i,1}, q_{i,2}, \ldots$, $q_{i,j}, \ldots$. Nous définirons, par l'application du même procédé, des ensembles q à $3, 4, \ldots, n, \ldots$ indices, qui seront les ensembles normaux $q^{(3)}, q^{(4)}, \ldots$, $q^{(n)}, \ldots$.

On a ainsi des ensembles parfaits non denses dans le continu désignés par la notation générale: $q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$, les entiers n, $i_1, i_2, \ldots, i_n$ prenant toutes les valeurs entières positives. L'ensemble $q_{i_1, i_2, \ldots, i_n, i_{n+1}}$ est contenu dans l'ensemble $q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ et est non dense par rapport à lui.

Soit $p_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ l'ensemble des points *irrationnels* de $q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$. La réunion de tous les $p_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$, n étant fixe, constitue l'ensemble P_n des points irrationnels pour lesquels tous les quotients incomplets, à partir d'un certain rang, surpassent n.

35. Il existe des points qui font partie de P_n, quel que soit n; ce sont les points irrationnels représentables par des fractions continues dans lesquelles le nombre des quotients incomplets inférieurs à n est fini, quel que soit n; je désigne l'ensemble de ces points par P_ω; ainsi, *P_ω est l'ensemble des points irrationnels pour lesquels le quotient incomplet de rang n croît indéfiniment avec n,* et l'on a, P_0 désignant le segment $(0, 1)$:

$$P_0 > P_1 > P_2 > \ldots > P_n > \ldots > P_\omega.$$

Soit A un point déterminé de P_ω, représenté par la fraction:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots).$$

Ce point fait partie de $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$; il appartient donc à un ensemble normal $q^{(1)}$ bien déterminé, soit q_{i_1}, à un ensemble normal $q^{(2)}$ bien déterminé qui, puisqu'il a en commun avec q_{i_1} un point irrationnel, doit être contenu dans q_{i_1}, soit donc q_{i_1, i_2}; d'une manière générale, le point A est contenu dans un ensemble normal $q^{(n)}$ déterminé, qui est de la forme $q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$. Ainsi, au point A de P_ω correspond une suite d'entiers positifs bien déterminée $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$ telle que le point A est contenu dans tous les ensembles:

$$q_{i_1} > q_{i_1, i_2} > \ldots > q_{i_1, i_2, \ldots, i_n} > \ldots.$$

Réciproquement, donnons-nous une suite d'entiers positifs $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$ et considérons les ensembles:

$$P_0 > q_{i_1} > q_{i_1, i_2} > \ldots > q_{i_1, i_2, \ldots, i_n} > \ldots. \tag{1}$$

Ces ensembles étant fermés, et le premier d'entre eux étant borné, il existe au moins un point qui leur est commun. Si nous revenons aux notations premières relatives aux ensembles q, ces ensembles seront désignés de la manière suivante:

$$q_{i_1} = q^{(1)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h_1}] \text{ avec } h_1 \geqq 1,$$

$$q_{i_1, i_2} = q^{(2)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h_1}, \ldots, \alpha_{h_2}] \text{ avec } h_2 \geqq 2 \text{ et } h_2 \geqq h_1,$$

. . . .

$$q_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h_1}, \ldots, \alpha_{h_2}, \ldots, \alpha_{h_n}] \text{ avec } h_n \geqq n \text{ et } h_n \geqq h_{n-1} \cdot$$

. . . .

Du fait que $h_n \geqq n$ résulte que h_n croît indéfiniment, de sorte que les entiers α définis par ce qui précède sont en nombre infini; il y a donc un et un seul point contenu dans tous les ensembles q de (1); c'est le point irrationnel défini par:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{h_1}, \ldots, \alpha_{h_2}, \ldots, \alpha_{h_n}, \ldots),$$

et ce point appartient à tous les P_n, par suite à P_ω. Ainsi, à toute suite d'entiers positifs $i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots$ correspond un point déterminé de P_ω, à savoir le point unique contenu dans tous les ensembles $q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$. Nous établissons de la sorte, entre l'ensemble S de toutes les suites d'entiers positifs et l'ensemble P_ω, une correspondance *biunivoque et réciproque* définie par la loi suivante:

Il y a correspondance entre l'élément A de S:

$$(i_1, i_2, \ldots, i_n, \ldots)$$

et le point B de P_ω représenté par la fraction:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_\nu, \ldots)$$

si le point $(a_1, a_2, \ldots)$ est contenu dans tous les ensembles $q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$, quel que soit n.

Je dis que la partie de P_ω contenue dans l'ensemble $q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$, soit $D[q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}, P_\omega]$, *est dense dans* $q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$. En effet, soit

$$q_{i_1, i_2, \ldots, i_n} = q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h];$$

au voisinage de tout point A de $p^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h]$, soit:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_{h+1}, \beta_{h+2}, \ldots)$$

existe un point faisant partie du même ensemble et de P_ω; il suffit de prendre le point:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h, \beta_{h+1}, \ldots, \beta_{h+j}, n+1, n+2, \ldots)$$

où les quotients qui suivent celui de rang $h+j$ sont les nombres de la suite naturelle à partir de $n+1$. Ce point, qui fait partie de P_ω et de $q^{(n)}[\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_h]$, peut être pris aussi près qu'on veut de A, en prenant j assez grand. La proposition est donc démontrée.

A fortiori, si $r > n$, *l'ensemble* $D[q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}, P_r]$ *est dense dans* $q_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$, puisque P_r contient P_ω.

36. Cela posé, nous allons donner des exemples de fonctions de classes 2 et 3, définies sur P_0. Remarquons d'abord que, d'après le § 29, la classe α d'une fonction f définie sur P_0, si $\alpha > 1$, est indépendante des valeurs de f aux points *rationnels* de P_0, qui forment un ensemble dénombrable.

Donnons-nous $n+1$ nombres finis, quelconques, que nous désignerons par $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n$ et considérons la fonction φ définie de la manière suivante: sur $P_i - P_{i+1}$, $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$, $\varphi = u_i$; sur P_n, $\varphi = u_n$. φ est ainsi définie en tout point de P_0; je dis que φ est de classe $\leqq 2$. En effet, φ est de classe $\leqq 2$ sur chaque ensemble normal $q^{(n)}$, puisqu'on a sur un tel ensemble: $\varphi = u_n$, sauf aux points rationnels de l'ensemble; admettons comme démontré que φ est de classe $\leqq 2$ sur tous les ensembles normaux $q^{(i+1)}$; alors, comme, sur chaque ensemble normal $q^{(i)}$, φ diffère de la constante u_i aux points d'un ensemble comprenant, d'une part un ensemble dénombrable, d'autre part une infinité dénombrable d'ensembles $q^{(i+1)}$ sur chacun desquels φ est de classe $\leqq 2$ par hypothèse, φ est aussi de classe $\leqq 2$ sur l'ensemble $q^{(i)}$ considéré (§ 28); en remontant de proche en proche, on reconnaît ainsi que φ est de classe $\leqq 2$ sur P_0.

37. Donnons-nous maintenant un système de nombres finis comprenant une suite infinie: $u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ et en outre un nombre u_ω; considérons la fonction f ainsi définie: sur $P_i - P_{i+1}$ $[i = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots]$,

$f = u_i$; sur P_ω, $f = u_\omega$. Je dis que f, qui est ainsi définie en tout point de P_0, est de classe $\leqq 3$.

En effet, désignons par f_n la fonction qui est égale à u_i sur $P_i - P_{i+1}$ $[i = 0, 1, 2, \ldots, n-1]$, et à u_ω sur P_n; f_n est de classe $\leqq 2$ d'après le § 36. Je dis qu'on a: $\lim f_n = f$. En effet, tout point A de P_0 appartient, soit à un des ensembles $P_i - P_{i+1}$, soit à P_ω; dans le premier cas, A appartenant à $P_i - P_{i+1}$, on a, dès que n dépasse la valeur i: $f_n(A) = u_i = f(A)$, d'où $\lim\limits_{n=\infty} f_n(A) = f(A)$; dans le second cas, A fait partie de P_n, quel que soit n; on a donc, pour toute valeur de n: $f_n(A) = u_\omega = f(A)$; donc encore: $\lim f_n(A) = f(A)$. Ainsi f, limite de f_n qui est de classe $\leqq 2$, *est de classe* $\leqq 3$.

Dans le cas particulier où l'on a: $\lim u_n = u_\omega$, je dis que f est de classe $\leqq 2$. En effet, formons la fonction $f - f_n$; elle est égale, sur $P_0 - P_1$, $P_1 - P_2$, $P_{n-1} - P_n$, à 0; sur $P_n - P_{n+1}$, $P_{n+1} - P_{n+2}, \ldots$, $P_{n+h} - P_{n+h+1}, \ldots$ respectivement à $u_n - u_\omega$, $u_{n+1} - u_\omega, \ldots, u_{n+h} - u_\omega, \ldots$ enfin, sur P_ω, à 0. Si ε est un nombre positif, dès que n est assez grand, toutes les quantités $u_n - u_\omega$, $u_{n+1} - u_\omega, \ldots$ sont en valeur absolue inférieures à ε; on a donc: $|f - f_n| < \varepsilon$, ce qui montre que f_n tend uniformément vers f; donc f est de classe $\leqq 2$ d'après le § 3.

38. Je dis maintenant que si l'on n'a pas: $\lim u_n = u_\omega$, la fonction f n'est pas de classe $\leqq 2$, *par suite est certainement de classe* 3. Pour cela, je vais montrer qu'on aboutit à une contradiction en supposant, comme je vais le faire, qu'il existe une suite de fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_\nu, \ldots$ toutes de classe $\leqq 1$, et telles qu'on ait: $\lim f_\nu = f$.

Du fait que la suite $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ n'a pas pour limite u_ω résulte qu'il existe un nombre positif λ tel que, quel que soit n, il y a un entier $n_1 > n$ tel que:

$$|u_{n_1} - u_\omega| > \lambda.$$

Prenons μ tel que: $0 < \mu < \lambda$ et posons: $\lambda = \mu + 2\varepsilon$.

Cela posé, considérons un ensemble normal $q^{(n)}$ déterminé, choisi arbitrairement, et soit H une *portion* de cet ensemble, c'est-à-dire, d'après la définition du § 8, l'ensemble parfait qui est le dérivé de l'ensemble des points de $q^{(n)}$ intérieurs à un segment Σ contenant à son intérieur au moins un point de $q^{(n)}$.

Déterminons un entier $n_1 > n$ tel que:

$$(1) \qquad |u_{n_1} - u_\omega| > \lambda = \mu + 2\varepsilon.$$

L'ensemble $D(q^{(n)}, P_{n_1})$ est *dense* dans l'ensemble $q^{(n)}$, par suite $D(H, P_{n_1})$ est dense dans l'ensemble parfait H, de sorte qu'on peut trouver un point A intérieur à Σ, faisant partie de H et de P_{n_1}; ce point appartenant à P_{n_1}, fait partie d'un ensemble normal $q^{(n_1)}$ bien déterminé, soit K la portion de cet ensemble normal déterminée par Σ. K est contenu dans H.

K est un ensemble parfait; chacune des fonctions f_i est de classe $\leqq 1$ sur K, par suite ponctuellement discontinue; il y a donc un ensemble Π de première catégorie par rapport à K, tel qu'en tout point de $K - \Pi$, chacune des fonctions f_i est continue par rapport à K. D'autre part, K est une *portion* d'un certain ensemble normal $q^{(n_1)}$; on a $f = u_{n_1}$ aux points de cet ensemble qui ne font pas partie de P_{n_1+1} et qui ne sont pas rationnels, et comme $D(q^{(n_1)}, P_{n_1+1})$ est de première catégorie par rapport à $q^{(n_1)}$, l'ensemble L des points de K où l'on n'a pas: $f = u_{n_1}$, est de première catégorie par rapport à K. L'ensemble $K - M(\Pi, L)$ est donc *dense* dans K; nous pouvons prendre un point B intérieur à Σ et contenu dans cet ensemble; on a: $f(B) = u_{n_1}$, et toutes les fonctions f_i sont continues en B par rapport à K.

Cela posé, donnons-nous un entier p. Comme $\lim f_\nu(B) = f(B) = u_{n_1}$, nous pouvons déterminer un entier $p_1 > p$ tel que:

$$|f_{p_1}(B) - u_{n_1}| < \varepsilon.$$

Comme f_{p_1} est continue en B par rapport à K, nous pouvons déterminer une portion H_1 de K contenant B, telle que, C étant un point *quelconque* de H_1, on ait:

$$|f_{p_1}(C) - f_{p_1}(B)| < \varepsilon,$$

ce qui donne, en combinant avec l'inégalité précédente:

$$|f_{p_1}(C) - u_{n_1}| < 2\varepsilon.$$

En rapprochant de l'inégalité (1), on obtient:

$$(2) \qquad |f_{p_1}(C) - u_\omega| > \mu.$$

En résumé, étant donnés, d'une part un entier p, d'autre part une portion H d'un ensemble normal $q^{(n)}$, on peut déterminer un entier $p_1 > p$ et une portion H_1 d'un ensemble normal $q^{(n_1)}$, avec $n_1 > n$, et H_1 étant compris dans H, tels que pour tout point C de H_1, on ait l'inégalité (2).

Appliquons cette proposition une seconde fois en remplaçant p et H par p_1 et H_1, nous obtenons un entier $p_2 > p_1$ et une portion H_2 d'un ensemble normal $q^{(n_2)}$, avec $n_2 > n_1$, et H_2 étant compris dans H_1, tels qu'en tout point C de H_2, on a:

$$|f_{p_2}(C) - u_\omega| > \mu.$$

En répétant indéfiniment l'application de ce procédé, on obtient, d'une part deux suites d'entiers croissant indéfiniment:

$$p_1 < p_2 < \ldots < p_i < \ldots,$$
$$n_1 < n_2 < \ldots < n_i < \ldots,$$

d'autre part des ensembles parfaits dont chacun est contenu dans celui qui précède:

$$H_1 > H_2 > \ldots > H_i > \ldots,$$

H_i étant une portion d'ensemble normal $q^{(n_i)}$, de telle sorte qu'en tout point C de H_i on a:

$$|f_{p_i}(C) - u_\omega| > \mu. \tag{3}$$

Il existe un point contenu dans tous les ensembles fermés H, par suite, satisfaisant à (3) quel que soit i; un tel point, soit C, appartenant à une infinité d'ensembles normaux $q^{(n_1)}, q^{(n_2)}, \ldots, q^{(n_i)}, \ldots$, les n_i croissant indéfiniment, fait partie de P_ω; on a donc:

$$f(C) = u_\omega.$$

L'inégalité (3) s'écrit donc:

$$|f_{p_i}(C) - f(C)| > \mu,$$

ce qui, comme p_i croît indéfiniment, est en contradiction avec le fait que $\lim f_{p_i}(C) = f(C)$. La proposition est donc démontrée.

Nous avons ainsi établi *l'existence effective de fonctions de classe* 3.[1] On peut particulariser, en prenant, par exemple: $u_0 = u_1 = \ldots = u_n = \ldots = 0$, $u_\omega = 1$, ce qui nous donne, comme exemple de fonction de classe 3, la fonction égale à 0 en tout point du segment $(0, 1)$, sauf aux points irrationnels dont le quotient incomplet de rang n croît indéfiniment avec n, pour lesquels elle est égale à 1.

---

[1] Dès 1898, M. VOLTERRA, à qui j'avais communiqué le théorème sur les fonctions de classe 1 (§ 13), m'avait indiqué un exemple d'une fonction qui n'est certainement pas de classe ≤ 2.

TABLE.

Pages.

PREMIÈRE PARTIE.

Introduction 1
CHAPITRE I. Définition des diverses classes de fonctions 2
CHAPITRE II. Les ensembles à n dimensions 8
CHAPITRE III. Les fonctions de classe 1 12
CHAPITRE IV. Propriété commune aux fonctions de E 21
CHAPITRE V. Premières recherches sur les fonctions de classes 2 et 3 ... 30

SUR LE PROBLÈME DES TROIS CORPS.

Trajectoires le long desquelles deux au moins des trois corps se choquent. Conditions qui entraînent un choc

PAR

GIULIO BISCONCINI

à ROME.

Préface.

M. PAINLEVÉ, en étudiant le problème des trois corps, a démontré que le mouvement se poursuit indéfiniment régulier, pourvu que les conditions initiales ne soient pas telles qu'à un instant fini une au moins des distances mutuelles ne soit pas nulle.[1]

En d'autres termes, si, pour une valeur finie t_1 du temps, deux au moins des trois points coïncident, les équations différentielles du mouvement ne peuvent pas être intégrées à l'aide de séries convergentes pour $t \geqq t_1$. Les développements sont au contraire toujours valables pour $t < t_1$.

M. PAINLEVÉ ajoutait ensuite: »Il serait donc extrêmement important de définir avec précision les conditions initiales qui correspondent à un choc», et plus loin, en faisant allusion à une étude qu'il avait commencée, mais pas accomplie, il observait: »Cette discussion me donne lieu de penser que les conditions initiales qui entraînent un choc au bout d'un temps fini satisfont à deux relations analytiques distinctes (qui se réduisent à une dans le cas du mouvement plan)».

M. le prof. LEVI-CIVITA, en envisageant le cas particulier du mouvement plan, se proposa cette question, que M. PAINLEVÉ n'avait pas résolue.

---

[1] *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles,* p. 583.

Dans son travail il démontra effectivement l'existence d'une relation analytique uniforme, et il en donna une expression développée en série de puissances de la distance des deux points, qui tendent à se choquer.[1]

Le chemin avait été tracé, et l'on n'avait qu'à le suivre pour résoudre le problème dans le cas général. Voici les résultats auxquels nous sommes parvenus. Soient P_0, P_1, P_2 les trois corps. Posons $\rho_1 = P_0P_1$, $\rho_2 = P_0P_2$, et faisons l'hypothèse que $\lim\limits_{t=t_1} \rho_1 = 0$ et $\lim\limits_{t=t_1} \rho_2 \neq 0$. Il s'agit de déterminer les relations, auxquelles doivent satisfaire les conditions initiales, pour que cela ait lieu. — Les deux hypothèses, que nous avons faites, doivent être évidemment suffisantes pour caractériser les chocs P_0P_1 et les conditions initiales, dont ils dépendent. Néanmoins, pour la résolution du problème, nous avons introduit une troisième hypothèse, que nous n'avons pas pu déduire des autres. Nous avons admis, que, dans le voisinage de P_0, la vitesse angulaire de P_0P_1 dans le mouvement relatif par rapport à P_0 soit finie.

Le raisonnement, qui nous a conduit à l'admettre, est tout à fait intuitif et on le trouvera dans le § 4, n° 2.

Quant aux différentes phases du procédé, elles peuvent être résumées en un mot.

Nous avons considéré le mouvement relatif des points P_1, P_2, par rapport à P_0 et, par un choix convenable des variables, nous avons conduit les équations du mouvement au type de celles de M. Levi-Civita (v. § 4, n° 1). Nous avons alors démontré, que les trajectoires singulières du système, le long desquelles les deux points P_0, P_1 doivent se choquer, correspondent univoquement aux solutions, qui sont holomorphes dans le voisinage de la position de choc (v. § 5, n° 3). Nous avons déduit, selon les prévisions de M. Painlevé »deux relations analytiques distinctes» entre les conditions initiales, relations, qui nous permettent de décider, si le mouvement aura lieu le long d'une des ∞^8 trajectoires singulières.

Si nous indiquons ces deux relations par $u_1^{(1)} = 0$, $u_2^{(1)} = 0$, il est évident qu'une seconde couple $u_1^{(2)} = 0$, $u_2^{(2)} = 0$, analogue à la première, sera caractéristique pour les chocs P_0P_2, et une troisième $u_3^{(1)} = 0$, $u_3^{(2)} = 0$

[1] *Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi.* Annali di Matematica. Tomo IX, serie III^a. — Une nouvelle rédaction de ce mémoire paraîtra sous peu dans les »Acta».

pour les chocs P_1P_2. En résumé les deux équations

$$u_1^{(1)}u_1^{(2)}u_1^{(3)} = 0, \qquad u_2^{(1)}u_2^{(2)}u_2^{(3)} = 0$$

nous permettrons de caractériser tous les mouvements singuliers du système, dans lesquels deux quelconques des points se choquent.

Nous finirons ce court résumé de notre travail en ajoutant, que dans le dernier paragraphe nous nous sommes occupés de déterminer effectivement la forme analytique des équations $u_1^{(1)} = 0$, $u_2^{(1)} = 0$, en développant les premiers membres en séries de puissances de la distance P_0P_1.

§ 1. *Équations du mouvement.*

I. *Mouvement des trois corps P_0, P_1, P_2 référé à des axes fixes.* — Considérons trois points P_0, P_1, P_2, dont les masses sont m_0, m_1, m_2, et supposons qu'ils s'attirent mutuellement selon la loi de NEWTON. Rapportons-les à un système d'axes cartésiens ξ, η, ζ, fixes dans l'espace, et appelons ξ_i, η_i, ζ_i les coordonnées d'un point quelconque entre eux, et $\bar{p}_i, \bar{q}_i, \bar{r}_i$ les composantes de sa quantité de mouvement.

Les équations du mouvement du système sont:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \bar{p}_i}, & \dfrac{d\eta_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \bar{q}_i}, & \dfrac{d\zeta_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \bar{r}_i}; \\ \dfrac{d\bar{p}_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \xi_i}, & \dfrac{d\bar{q}_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \eta_i}, & \dfrac{d\bar{r}_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \zeta_i}, \end{cases} \qquad {\scriptstyle (i=0,1,2)}$$

où l'on a posé:

$$(2) \qquad H \equiv T - U = \frac{1}{2}\sum_0^2{}_j \frac{1}{m_j}(\bar{p}_j^2 + \bar{q}_j^2 + \bar{r}_j^2) - \sum_0^2{}_{ij} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}},$$

et:

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2}.$$

Il va sans dire, que nous avons choisi l'unité de temps, de manière que la constante d'attraction universelle devienne égale à l'unité.

II. *Transformation de Poincaré.* — Envisageons maintenant le système d'axes x, y, z menés par P_0 et dont les directions sont constamment celles des axes ξ, η, ζ. Soient x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 les coordonnées des points

P_1, P_2 rapportés à ces axes. Les formules de transformation entre les deux systèmes sont:

$$
(3) \qquad \begin{cases} x_0 = \xi_0, & y_0 = \eta_0, & z_0 = \zeta_0, \\ x_i = \xi_i - \xi_0, & y_i = \eta_i - \eta_0, & z_i = \zeta_i - \zeta_0. \end{cases} \qquad (i=1,2)
$$

Posons ensuite:

$$
(3') \qquad \begin{cases} p_0 = \sum_0^2{}_j \bar{p}_j, & q_0 = \sum_0^2{}_j \bar{q}_j, & r_0 = \sum_0^2{}_j \bar{r}_j, \\ p_i = \bar{p}_i, & q_i = \bar{q}_i, & r_i = \bar{r}_i. \end{cases} \qquad (i=1,2)
$$

On aperçoit que, puisque $\sum_0^2{}_j p_j x_j = \sum_0^2{}_j \bar{p}_j \xi_j$, etc., les équations (3) et (3′) donnent entre les variables $x_i, y_i, z_i; p_i, q_i, r_i$ et $\xi_i, \eta_i, \zeta_i; \bar{p}_i, \bar{q}_i, \bar{r}_i$ une transformation, qui conserve la forme canonique au système (1).

Nous pouvons maintenant remarquer que p_0, q_0, r_0 sont des constantes. Elles sont en effet, au multiplicateur $\sum_0^2{}_i m_i$ près, les composantes de la vitesse du centre de gravité des trois points, qui se meut uniformément sur une ligne droite. On pourra donc les supposer égales à zéro, sans rien ôter à la généralité du problème.

Les équations, qui définissent le mouvement relatif de P_1 et P_2 par rapport à P_0, sont donc:

$$
(1') \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, & \dfrac{dy_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial q_i}, & \dfrac{dz_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial r_i}; \\ \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}, & \dfrac{dq_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial y_i}, & \dfrac{dr_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial z_i}, \end{cases} \qquad (i=1,2)
$$

où l'on a posé, en vertu des relations (2) et (3), (3′):

$$
(2') \qquad H \equiv T - U =
$$

$$
= \frac{1}{2}\left\{ \sum_1^2{}_i \left(\frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_i}\right)(p_i^2 + q_i^2 + r_i^2) + \frac{2}{m_0}(p_1 p_2 + q_1 q_2 + r_1 r_2) \right\} - \sum_0^2{}_{ij} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}},
$$

et

$$
\Delta_{0i} = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2},
$$

$$
\Delta_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2}.
$$

III. *Remplacement des composantes de la vitesse absolue de P_1 par les composantes de sa vitesse relative.* — Substituons maintenant à la place des composantes de la quantité de mouvement absolue de P_1 les composantes x_1', y_1', z_1' de sa vitesse relative.

Elles sont fournies par le premier groupe des équations (1'), dans lesquelles on doit supposer $i = 1$ et avoir égard à la relation (2').

En posant:

$$\mu_1 = \frac{1}{m_0} + \frac{1}{m_1}, \qquad \mu_2 = \frac{1}{m_0 + m_1} + \frac{1}{m_2}, \tag{4}$$

on aura:

$$\begin{cases} x_1' = \mu_1 p_1 + \dfrac{p_2}{m_0}, \\ y_1' = \mu_1 q_1 + \dfrac{q_2}{m_0}, \\ z_1' = \mu_1 r_1 + \dfrac{r_2}{m_0}, \end{cases} \tag{5}$$

et par conséquent:

$$H = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\mu_1}(x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) + \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right\} - \sum_0^2{}_{ij} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}. \tag{2$_a$}$$

Du premier groupe des équations (1'), en vertu des égalités (5), on tire donc:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{\partial H}{\partial x_1'}\frac{\partial x_1'}{\partial p_1} \qquad = \mu_1 \frac{\partial H}{\partial x_1'}, \qquad \text{etc.};$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_2} = \frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{\partial H}{\partial x_1'}\frac{\partial x_1'}{\partial p_2} = \frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{x_1'}{m_0\mu_1}, \quad \text{etc.};$$

c'est-à-dire:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial(\mu_1 H)}{\partial x_1'}, \qquad \frac{dy_1}{dt} = \frac{\partial(\mu_1 H)}{\partial y_1'}, \qquad \frac{dz_1}{dt} = \frac{\partial(\mu_1 H)}{\partial z_1'};$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_2}\left(H + \frac{x_1' p_2}{m_0\mu_1}\right), \qquad \frac{dy_2}{dt} = \frac{\partial}{\partial q_2}\left(H + \frac{y_1' q_2}{m_0\mu_1}\right), \qquad \frac{dz_2}{dt} = \frac{\partial}{\partial r_2}\left(H + \frac{z_1' r_2}{m_0\mu_1}\right).$$

En dérivant les relations (5) par rapport à t on a:

$$\frac{dx_1'}{dt} = \mu_1 \frac{dp_1}{dt} + \frac{1}{m_0}\frac{dp_2}{dt}, \quad \text{etc.,}$$

ou bien, en vertu des équations (1'):

$$\frac{dx_1'}{dt} = -\mu_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} - \frac{1}{m_0}\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\mu_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} - \frac{m_2 x_2}{\Delta_{02}^3} + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{m_1 m_2}{m_0 \Delta_{12}}\right)$$

$$= -\mu_1 \frac{\partial H}{\partial x_1} - \frac{m_2 x_2}{\Delta_{02}^3} - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{m_1 m_2}{m_0 \Delta_{12}}\right), \quad \text{etc.}$$

On pourra donc remplacer le deuxième groupe du système (1') par les équations:

$$\frac{dx_1'}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\mu_1 H + \frac{m_2 x_1 x_2}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_1 m_2}{m_0}\frac{1}{\Delta_{12}}\right), \quad \text{etc.,}$$

$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2}, \quad \text{etc.}$$

Posons enfin:

$$(2'') \quad \begin{cases} H_1 = \dfrac{1}{2}(x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) - \mu_1 \displaystyle\sum_{0}^{2}{}_{ij} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} + m_2 \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_1 m_2}{m_0}\frac{1}{\Delta_{12}}, \\[2ex] H_2 = \dfrac{\mu_2}{2}(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2) - \displaystyle\sum_{0}^{2}{}_{ij} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} + \frac{1}{m_0 \mu_1}(x_1' p_2 + y_1' q_2 + z_1' r_2). \end{cases}$$

D'après les équations (5) le système (1') sera équivalant au système:

$$(1'') \quad \begin{cases} \mathrm{I} \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{\partial H_1}{\partial x_1'}, & \dfrac{dy_1}{dt} = \dfrac{\partial H_1}{\partial y_1'}, & \dfrac{dz_1}{dt} = \dfrac{\partial H_1}{\partial z_1'}, \\[2ex] \dfrac{dx_1'}{dt} = -\dfrac{\partial H_1}{\partial x_1}, & \dfrac{dy_1'}{dt} = -\dfrac{\partial H_1}{\partial y_1}, & \dfrac{dz_1'}{dt} = -\dfrac{\partial H_1}{\partial z_1}; \end{cases} \\[4ex] \mathrm{II} \begin{cases} \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{\partial H_2}{\partial p_2}, & \dfrac{dy_2}{dt} = \dfrac{\partial H_2}{\partial q_2}, & \dfrac{dz_2}{dt} = \dfrac{\partial H_2}{\partial r_2}, \\[2ex] \dfrac{dp_2}{dt} = -\dfrac{\partial H_2}{\partial x_2}, & \dfrac{dq_2}{dt} = -\dfrac{\partial H_2}{\partial y_2}, & \dfrac{dr_2}{dt} = -\dfrac{\partial H_2}{\partial z_2}. \end{cases} \end{cases}$$

La transformation, que nous avons employée a fait donc perdre à notre système la forme canonique originaire, mais elle lui a donné une forme demi-canonique. De cette propriété nous allons profiter tout de suite.

IV. *Forme semi-canonique polaire pour les équations du premier groupe.* — Soient $\rho_1, \vartheta_1, \varphi_1$ les coordonnées polaires du point P_1, et P_1, Θ_1, Φ_1 leurs variables conjuguées. Nous entendons par cela, que, si l'on substitue

dans le premier groupe du système (1″) aux deux séries de variables x_1, y_1, z_1 ; x_1', y_1', z_1', les deux nouvelles séries, que nous venons d'indiquer, ce groupe doit maintenir la forme canonique.

Puisque on a:

$$(6)\qquad \begin{cases} x_1 = \rho_1 \sin\vartheta_1 \cos\varphi_1, \\ y_1 = \rho_1 \sin\vartheta_1 \sin\varphi_1, \\ z_1 = \rho_1 \cos\vartheta_1, \end{cases}$$

il faut poser:

$$(7)\begin{cases} P_1 = x_1'\dfrac{\partial x_1}{\partial\rho_1} + y_1'\dfrac{\partial y_1}{\partial\rho_1} + z_1'\dfrac{\partial z_1}{\partial\rho_1} = \quad x_1'\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + y_1'\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + z_1'\cos\vartheta_1, \\ \Theta_1 = x_1'\dfrac{\partial x_1}{\partial\vartheta_1} + y_1'\dfrac{\partial y_1}{\partial\vartheta_1} + z_1'\dfrac{\partial z_1}{\partial\vartheta_1} = \rho_1(x_1'\cos\vartheta_1\cos\varphi_1 + y_1'\cos\vartheta_1\sin\varphi_1 - z_1'\sin\vartheta_1), \\ \Phi_1 = x_1'\dfrac{\partial x_1}{\partial\varphi_1} + y_1'\dfrac{\partial y_1}{\partial\varphi_1} + z_1'\dfrac{\partial z_1}{\partial\varphi_1} = \rho_1(-x_1'\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + y_1'\sin\vartheta_1\cos\varphi_1). \end{cases}$$

On tirera identiquement:

$$P_1 d\rho_1 + \Theta_1 d\vartheta_1 + \Phi_1 d\varphi_1 = x_1' dx_1 + y_1' dy_1 + z_1' dz_1.$$

Cela nous suffit pour conclure, qu'il s'agit d'une transformation de contact. Par conséquent la forme canonique du premier groupe sera conservée.

Les relations (7) résolues par rapport à x_1', y_1', z_1' nous donnent en outre:

$$(7')\qquad \begin{cases} x_1' = P_1\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + \dfrac{\Theta_1}{\rho_1}\cos\vartheta_1\cos\varphi_1 - \dfrac{\Phi_1}{\rho_1\sin\vartheta_1}\sin\varphi_1, \\ y_1' = P_1\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + \dfrac{\Theta_1}{\rho_1}\cos\vartheta_1\sin\varphi_1 + \dfrac{\Phi_1}{\rho_1\sin\vartheta_1}\cos\varphi_1, \\ z_1' = P_1\cos\vartheta_1 \qquad - \dfrac{\Theta_1}{\rho_1}\sin\vartheta_1. \end{cases}$$

Les fonctions H_1 et H_2 pourront donc être mises sous la forme:

$$(2''')\qquad \begin{cases} H_1 = \dfrac{1}{2}\left(P_1^2 + \dfrac{\Theta_1^2}{\rho_1^2} + \dfrac{\Phi_1^2}{\rho_1^2\sin^2\vartheta_1}\right) - \mu_1\left(\dfrac{m_0 m_1}{\rho_1} + \dfrac{m_0 m_2}{\rho_2} + \dfrac{m_1 m_2}{\Delta}\right) \\ \qquad\qquad + \dfrac{m_2\rho_1\nabla_1}{\rho_2^3} + \dfrac{m_1 m_2}{m_0}\dfrac{1}{\Delta}, \\ H_2 = \dfrac{\mu_2}{2}(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2) - \left(\dfrac{m_0 m_1}{\rho_1} + \dfrac{m_0 m_2}{\rho_2} + \dfrac{m_1 m_2}{\Delta}\right) + \dfrac{\nabla_2}{m_0\mu_1}. \end{cases}$$

Dans ces relations les symboles introduits ont, comme il est aisé de voir, les significations suivantes:

$$(8)\quad \begin{cases} \rho_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}, \\ \Delta = \sqrt{(\rho_1 \sin\vartheta_1 \cos\varphi_1 - x_2)^2 + (\rho_1 \sin\vartheta_1 \sin\varphi_1 - y_2)^2 + (\rho_1 \cos\vartheta_1 - z_2)^2}, \\ \nabla_1 = x_2 \sin\vartheta_1 \cos\varphi_1 + y_2 \sin\vartheta_1 \sin\varphi_1 + z_2 \cos\vartheta_1, \\ \nabla_2 = p_2\left(P_1 \sin\vartheta_1 \cos\varphi_1 + \frac{\Theta_1}{\rho_1} \cos\vartheta_1 \cos\varphi_1 - \frac{\Phi_1}{\rho_1 \sin\vartheta_1} \sin\varphi_1\right) \\ \quad + q_2\left(P_1 \sin\vartheta_1 \sin\varphi_1 + \frac{\Theta_1}{\rho_1} \cos\vartheta_1 \sin\varphi_1 + \frac{\Phi_1}{\rho_1 \sin\vartheta_1} \cos\varphi_1\right) \\ \quad + r_2\left(P_1 \cos\vartheta_1 \qquad - \frac{\Theta_1}{\rho_1} \sin\vartheta_1\right). \end{cases}$$

Les équations du mouvement relatif sont donc évidemment:

$$(1''')\quad \begin{cases} \mathrm{I}\begin{cases} \frac{d\rho_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial P_1}, & \frac{d\vartheta_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \Theta_1}, & \frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial \Phi_1}, \\ \frac{dP_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \rho_1}, & \frac{d\Theta_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \vartheta_1}, & \frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial \varphi_1}; \end{cases} \\ \mathrm{II} \quad \frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial H_2}{\partial p_2}, \ \text{etc.,} \quad \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial H_2}{\partial x_2}, \ \text{etc.} \end{cases}$$

Il est aisé et en même temps intéressant, de mettre en évidence la signification cinématique des variables conjuguées aux coordonnées polaires du point P_1. Les égalités (7) nous montrent, que $P_1, \frac{\Theta_1}{\rho_1}, \frac{\Phi_1}{\rho_1 \sin\vartheta_1}$ se tirent de x_1', y_1', z_1' en ajoutant ces dernières, après les avoir multipliées par les cosinus de direction des tangentes aux lignes coordonnées polaires, qui passent par P_1. Les quantités $P_1, \frac{\Theta_1}{\rho_1}, \frac{\Phi_1}{\rho_1 \sin\vartheta_1}$ sont donc les projections sur ces lignes de la vitesse relative du point P_1.

§ 2. *Quelques conséquences, que l'on tire des équations du mouvement, dans l'hypothèse que* $\lim\limits_{t=t_1} P_0P_1 = 0$.

La forme, que nous avons donnée aux équations du mouvement, nous permettra d'étudier le comportement des variables du problème, lorsque $\rho_1 \equiv P_0P_1$ tend vers zéro pour une certaine valeur finie du temps. Cette hypothèse analytique entraîne l'hypothèse physique, que les deux points P_0P_1 se choquent au bout du temps t_1. L'intuition nous fait voir, que s'il y aura, à cause de ce choc, des singularités dans les caractéristiques du mouvement relatif des deux points P_1, P_2, elles pourront se trouver seulement dans celles du point P_1. En effet on comprend que ce choc ne pourra exercer qu'une influence très petite sur le mouvement de P_2. En d'autres termes les coordonnées et les composantes de la *vitesse absolue* (ou, ce qui revient au même, les composantes de sa quantité de mouvement absolue), que nous devons supposer finies avant le choc, devront rester telles pour $t = t_1$.

Cela justifie la transformation, que nous avons employée au n° 3 du paragraphe précédent, qui pouvait sembler d'abord sinon illogique au moins peu symétrique. Il est évident, que si nous n'avions pas opéré comme cela, toute singularité dans la vitesse de P_0 aurait amené une singularité analogue dans celle de P_2. Nous trouverons tout à l'heure une confirmation rigoureuse de cela.

I. *Comportement de la vitesse absolue de* P_2. — Proposons-nous de démontrer d'abord que:

Si ρ_1, *pour* $t = t_1$, *tend vers zéro, les fonctions* p_2, q_2, r_2 *restent toujours finies (même pour* $\rho_1 = 0$).

Cette propriété ressort tout de suite de la forme analytique particulière des équations (1'''). Considérons en effet, parmi les équations du second groupe, celles qui fournissent les dérivées de p_2, q_2, r_2 par rapport à t, et substituons H_2 par son expression (2''').

Il vient ainsi, en nous bornant à la première:

$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{m_0 m_2}{\rho_2^3} x_2 + \frac{m_1 m_2}{\Delta^3} (\rho_1 \sin\vartheta_1 \cos\varphi_1 - x_2),$$

ou bien:

$$\frac{dp_2}{dt} = -\frac{m_0 m_2}{\rho_2^2}\cos\rho_2 x - \frac{m_1 m_2}{\Delta^3}x_2 + \rho_1\frac{m_1 m_2 \sin\vartheta_1 \cos\varphi_1}{\Delta^3}.$$

Faisons maintenant l'hypothèse que $\lim\limits_{t=t_1}\rho_1 = 0$, et que la limite inférieure de ρ_2 soit plus grande que zéro. Ayant égard à la deuxième des relations (8), on conclut que $\lim\limits_{t=t_1}\Delta = \rho_2$, et que les deux fractions $\frac{x_2}{\Delta^3}$, $\frac{m_1 m_2 \sin\vartheta_1 \cos\varphi_1}{\Delta^3}$ restent finies. Nous aurons donc

$$\lim_{t=t_1}\rho_1\frac{m_1 m_2 \sin\vartheta_1 \cos\varphi_1}{\Delta^3} = 0$$

et nous pourrons conclure qu'il y aura un intervalle (t', t_1) assez petit, dans lequel la fonction $\frac{dp_2}{dt}$ restera toujours finie.

Puisque nous avons identiquement:

$$p_2(t_1) - p_2(t') = \int_{t'}^{t_1}\frac{dp_2}{dt}\,dt,$$

nous pourrons écrire:

$$p_2(t_1) = p_2(t') + (t_1 - t')\left[\frac{dp_2}{dt}\right]_{t_1+\varepsilon(t_1-t)}. \qquad 0 < \varepsilon < 1.$$

Il suffira donc d'admettre, que dans le point t' la fonction p_2 ait une valeur finie[1] pour en tirer qu'elle restera finie même au moment du choc.

Un raisonnement identique peut être fait pour q_2 et r_2, par conséquent notre lemme reste démontré.

II. *Comportement de la vitesse relative de P_1.* — Nous sommes à même maintenant de déduire de l'intégrale des forces vives du système (1''') d'autres propriétés pour les caractéristiques de P_1.

Si h est la valeur de l'énergie totale des trois points, l'intégrale de Jacobi, exprimée par les variables $x_i, y_i, z_i (i = 1, 2)$; x_1', y_1', z_1' ; p_2, q_2, r_2,

[1] Cela se vérifie, si nous supposons, que le mouvement soit régulier pour toute valeur du temps, qui ne correspond pas à un choc. Cette hypothèse est justifiée par le théorème de Painlevé (v. la préface).

sera, d'après l'égalité (2_a):

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\mu_1}(x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) + \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right\} - \sum_{1}^{2}{}_{ij}\frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}} = h.$$

Si l'on emploie la transformation fournie par les relations (6) et (7), on a:

$$(2_b)\qquad \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\mu_1}\left(P_1^2 + \frac{\Theta_1^2}{\rho_1^2} + \frac{\Phi_1^2}{\rho_1^2 \sin^2\vartheta_1}\right) + \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right\}$$
$$- \frac{m_0 m_1}{\rho_1} - \frac{m_0 m_2}{\rho_2} - \frac{m_1 m_2}{\Delta} = h,$$

et de suite:

$$\rho_1 P_1^2 + \frac{\Theta_1^2}{\rho_1} + \frac{\Phi_1^2}{\rho_1 \sin^2\vartheta_1} =$$
$$= 2m_0 m_1 \mu_1 + \rho_1 \mu_1\left\{2\left(h + \frac{m_0 m_2}{\rho_2} + \frac{m_1 m_2}{\Delta}\right) - \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right\}.$$

En posant enfin:

$$(9)\qquad \mathbf{P} = \mu_1\left\{2\left(h + \frac{m_0 m_2}{\rho_2} + \frac{m_1 m_2}{\Delta}\right) - \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right\},$$

et en remarquant, que $m_0 m_1 \mu_1 = m_0 + m_1$, on arrivera à l'égalité:

$$(10)\qquad \rho_1 P_1^2 + \frac{\Theta_1^2}{\rho_1} + \frac{\Phi_1^2}{\rho_1 \sin^2\vartheta_1} = 2(m_0 + m_1) + \rho_1 \mathbf{P}.$$

Si ρ_1 tend vers zéro, la fonction $\mathbf{P}$ ne peut pas croître indéfiniment, car ρ_2 ne s'annule pas, par hypothèse, et p_2, q_2, r_2 restent finies à cause du lemme démontré.

Le second membre de l'égalité précédente aura donc, pour ρ_1 aussi petite que l'on veut, une valeur très voisine à $2(m_0 + m_1)$. Mais, comme le premier membre est une somme de quantités essentiellement positives, chacune d'elles sera finie, dans le voisinage de $\rho_1 = 0$.

Nous pouvons donc énoncer ce nouveau lemme:

Si ρ_1, pour $t = t_1$, tend vers zéro les fonctions $\sqrt{\rho_1}\, P_1$, $\frac{\Theta_1}{\sqrt{\rho_1}}$, $\frac{\Phi_1}{\sqrt{\rho_1}\,\sin^2\vartheta_1}$ définies par les équations (1'''), ne peuvent pas croître indéfiniment, lorsque t s'approche à t_1.

Si nous envisageons maintenant l'identité:

$$\frac{d(\rho_1 P_1)}{dt} \equiv P_1 \frac{d\rho_1}{dt} + \rho_1 \frac{dP_1}{dt},$$

nous pouvons écrire, en vertu des équations différentielles:

$$\frac{d(\rho_1 P_1)}{dt} = P_1 \frac{\partial H_1}{\partial P_1} - \rho_1 \frac{\partial H_1}{\partial \rho_1}.$$

Ayant égard à l'expression analytique de H_1, donnée par la première des relations (2'''), nous avons donc:

$$\frac{d(\rho_1 P_1)}{dt} = P_1^2 - \rho_1 \Big\{ -\frac{\Theta_1^2}{\rho_1^3} - \frac{\Phi_1^2}{\rho_1^3 \sin^2 \vartheta_1} + \mu_1 \Big(\frac{m_0 m_1}{\rho_1^2} + \frac{m_1 m_2}{\Delta^2} \frac{\partial \Delta}{\partial \rho_1} \Big) + \frac{m_2 \nabla_1}{\rho_2^3} - \frac{m_1 m_2}{m_0 \Delta^2} \frac{\partial \Delta}{\partial \rho_1} \Big\}.$$

Mais, comme on a:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \rho_1} = \frac{1}{\Delta} \{ (\rho_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 - x_2) \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 + (\rho_1 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 - y_2) \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 + (\rho_1 \cos \vartheta_1 - z_2) \cos \vartheta_1 \}$$
$$= \frac{1}{\Delta} (\rho_1 - x_2 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 - y_2 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 - z_2 \cos \vartheta_1) = \frac{\rho_1 - \nabla_1}{\Delta},$$

la dernière relation s'écrira:

$$\frac{d(\rho_1 P_1)}{dt} = P_1^2 + \frac{\Theta_1^2}{\rho_1^2} + \frac{\Phi_1^2}{\rho_1^2 \sin^2 \vartheta_1} - \frac{m_0 + m_1}{\rho_1} - \rho_1 \Big(\frac{\mu_1 m_1 m_2 (\rho_1 - \nabla_1)}{\Delta^3} + \frac{m_2 \nabla_1}{\rho_2^3} - \frac{m_1 m_2 (\rho_1 - \nabla_1)}{m_0 \Delta^3} \Big).$$

En se servant en outre de l'égalité (10) et en faisant quelques réductions on aura:

$$\frac{d(\rho_1 P_1)}{dt} = \frac{m_0 + m_1}{\rho_1} + \mathsf{P} - m_2 \rho_1 \Big(\frac{\rho_1 - \nabla_1}{\Delta^3} + \frac{\nabla_1}{\rho_2^3} \Big).$$

Enfin, en posant:

$$\mathsf{Q} = \mathsf{P} - m_2 \rho_1 \Big(\frac{\rho_1 - \nabla_1}{\Delta^3} + \frac{\nabla_1}{\rho_2^3} \Big),$$

il viendra:

$$(11) \qquad \frac{d(\rho_1 P_1)}{dt} = \frac{m_0 + m_1}{\rho_1} + \mathbf{Q}.$$

Rappelons-nous maintenant, que la fonction $\mathbf{P}$ reste finie pour toute valeur de t dans le domaine de t_1, et remarquons, que l'expression $m_2\rho_1\left(\frac{\rho_1 - \nabla_1}{\Delta^3} + \frac{\nabla_1}{\rho_2^3}\right)$ tend vers zéro en même temps que $t_1 - t$. Nous en tirons que $\mathbf{Q}$ reste finie dans le domaine de t_1.

Il sera donc possible d'envisager une certaine valeur t' de t, telle que, dans l'intervalle (t', t), on ait $\frac{m_0 + m_1}{\rho_1} + \mathbf{Q} > 0$. Dans cet intervalle $\frac{d(\rho_1 P_1)}{dt}$ restera positive et la fonction $\rho_1 P_1$ sera par conséquent toujours croissante. Comme elle ne peut pas donc s'annuler pour ces valeurs du temps (t_1 au plus exceptée), ni l'un ni l'autre de ses facteurs pourra être égal à zéro.

Mais, puisqu'on a déjà vu que $P_1 = \frac{\partial H_1}{\partial P_1} = \frac{d\rho_1}{dt}$, on peut conclure, que la fonction $\rho_1(t)$ tendra vers zéro toujours de la même manière, c'est-à-dire en décroissant.

En résumé on a:

Si ρ_1, pour $t = t_1$, tend vers zéro, la fonction $P_1 = \frac{d\rho_1}{dt}$ ne peut pas s'annuler dans le voisinage de t_1.

Nous démontrerons enfin que:

Dans le voisinage de t_1 la limite inférieure des valeurs de $\rho_1 P_1^2$ ne peut pas être zéro.

Remarquons, à ce but, que la relation (11) nous donne:

$$\rho_1 \frac{dP_1}{dt} = - P_1 \frac{d\rho_1}{dt} + \frac{m_0 m_1}{\rho_1} + \mathbf{Q}.$$

L'identité:

$$\frac{d(\rho_1 P_1^2)}{dt} \equiv 2\rho_1 P_1 \frac{dP_1}{dt} + P_1^2 \frac{d\rho_1}{dt}$$

pourra donc être écrite:

$$\frac{d(\rho_1 P_1^2)}{dt} = 2 P_1\left(\frac{m_0 + m_1}{\rho_1} + \mathbf{Q}\right) - P_1^2 \frac{d\rho_1}{dt}.$$

Ou bien, puisque $P_1 = \frac{d\rho_1}{dt}$:

$$\frac{d(\rho_1 P_1^2)}{dt} = \frac{2}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{dt}\left(m_0 + m_1 - \frac{1}{2}\rho_1 P_1^2 + \rho_1 \mathfrak{Q}\right). \tag{12}$$

Si nous admettons, que dans le voisinage de t_1 la limite inférieure des valeurs de $\rho_1 P_1^2$ soit zéro, nous pourrons conclure qu'il y aura une valeur t', suffisamment près de t_1, pour laquelle $\rho_1 P_1^2$ deviendra aussi petite que l'on veut. En particulier nous pourrons supposer, que, pour $t = t'$, soit $\rho_1 P_1^2 < \frac{m_0 + m_1}{2}$. Nous pouvons encore supposer que, pour $t = t'$, on ait $\rho_1 \mathfrak{Q} < \frac{m_0 + m_1}{4}$, car nous avons vu dans la démontration du lemme précédent, que $\rho_1 \mathfrak{Q}$ tend vers zéro en même temps que $t_1 - t$. On tire de tout cela, que la valeur de $\frac{1}{2}\rho_1 P_1^2 - \rho_1 \mathfrak{Q}$, pour $t = t_1$, sera moindre que $\frac{m_0 + m_1}{2}$ et, par conséquent, que l'inégalité

$$m_0 + m_1 - \frac{1}{2}\rho_1 P_1^2 + \rho_1 \mathfrak{Q} > \frac{m_0 + m_1}{2} \tag{13}$$

sera verifiée.

Le premier membre de la relation (12) aura donc le même signe que $\frac{d\rho_1}{dt}$, c'est-à-dire qu'il sera négatif.

En d'autres termes la fonction $\rho_1 P_1^2$ sera décroissante dans le point t_1.

Envisageons alors une valeur t'' comprise dans l'intervalle (t', t_1) et qui soit suffisamment voisine à t'.

Puisque l'inégalité (13) reste *a fortiori* satisfaite, nous en tirons, que même à l'instant t'' la fonction $\rho_1 P_1^2$ sera décroissante.

Comme nous pouvons répéter ce raisonnement pour chaque point de (t', t_1), il faudra que l'on ait:

$$\lim_{t=t_1} \rho_1 P_1^2 = 0. \tag{14}$$

Il est cependant aisé de montrer, que cette conclusion est absurde. Écrivons en effet d'après (12):

$$-d(\rho_1 P_1^2) = -2\frac{d\rho_1}{\rho_1}\left(m_0 + m_1 - \frac{1}{2}\rho_1 P_1^2 + \rho_1 \mathfrak{Q}\right).$$

Puisque $-d(\rho_1 P_1^2)$ et $-d\rho_1$ sont des quantités positives, cette égalité donne lieu, en vertu de (13), à l'inégalité:

$$-d(\rho_1 P_1^2) > -(m_0 + m_1) d \log \rho_1 .$$

De celle-ci on tire, en intégrant tous les deux membres entre deux limites t', t'', qui vérifient l'inégalité (13):

$$(\rho_1 P_1^2)_{t'} - (\rho_1 P_1^2)_{t''} > (m_0 + m_1) \{ (\log \rho_1)_{t'} - (\log \rho_1)_{t''} \} .$$

Faisons maintenant tendre t'' vers t_1. Le premier membre, en vertu de l'égalité (14), aura la limite finie $(\rho_1 P_1^2)_{t'}$, tandis que le second croîtra indéfiniment. Ce résultat nous montre, que l'hypothèse, d'où nous sommes partis, est fausse.

§ 3. *Changement de la variable indépendante.*

I. *Remplacement de t par ρ_1.* — Dans une remarque au commencement du paragraphe précédent nous avons employé implicitement une propriété, qui à été enoncée par M. Painlevé (v. aussi la préface). Ce théorème dit, au fond, que le mouvement de trois points matériaux, qui s'attirent selon la loi de Newton se poursuit régulièrement et les équations se laissent intégrer par une approximation aussi grande que l'on veut, pourvu qu'il n'y ait pas un choc au bout d'un temps fini. A partir de cet instant on ne peut rien affirmer.

Les cas, qui peuvent se présenter sont évidemment deux: *a*) une seule des trois distances tend pour $t = t_1$ vers zéro, tandis que les deux autres restent supérieures à zéro, *b*) tous les trois corps tendent en même temps vers une position déterminée de l'espace.

Nous étudierons seulement le premier et nous supposerons, que ce soit la distance $P_0 P_1$ qui s'annule pour la valeur t_1 du temps.

Comme nous n'avons fait aucune hypothèse à l'égard des masses des trois corps, il est bien évident, que nous pourrons donner aux résultats, que nous atteindrons, une interprétation plus générale. Il suffira que l'on change convenablement la signification donnée aux symboles, pour avoir des propriétés identiques relatives à un choc entre deux autres points.

Faisons donc l'hypothèse: $\lim_{t=t_1} \rho_1 = 0$. D'après le théorème de PAINLEVÉ, pour toute valeur de t près de t_1 les fonctions $\rho_1, \vartheta_1, \varphi_1; P_1, \theta_1, \Phi_1$; $x_2, y_2, z_2; p_2, q_2, r_2$ dépendent régulièrement de t_1. Nous avons de plus démontré (v. § 2, n° 2, II lemme) que $\left(\frac{d\rho_1}{dt_1}\right)_{t=t_1}$ est négative. On tire par conséquent, que t pourra être considérée une fonction de ρ_1 régulière dans le domaine $\rho_1 = 0$. Nous avons donc:

Si ρ_1, pour $t = t_1$, tend vers zéro, les fonctions $\vartheta_1, \ldots, \Phi_1; x_2, y_2, \ldots, r_2$ dépendent régulièrement de ρ_1 dans le voisinage de t_1 (cette valeur au plus exceptée).

Pour avoir les équations, qui définissent ces fonctions au moyen de ρ_1, il faudra évidemment éliminer dt entre les équations (1‴). A ce but écrivons la première sous la forme

$$\frac{dt}{d\rho_1} = \frac{1}{\frac{\partial H_1}{\partial P_1}}.$$

La quatrième du premier groupe nous donne par conséquent:

$$\frac{dP_1}{d\rho_1} = -\frac{\partial H_1}{\partial \rho_1} : \frac{\partial H_1}{\partial P_1}.$$

Cependant, comme il est possible de tirer de l'intégrale $H = h$ la fonction P_1, nous pourrons remplacer l'équation précédente par $H = h$, et envisager, dans toutes les autres, P_1 comme une fonction connue.

En résumé le système auquel doivent satisfaire $\vartheta_1(\rho_1), \varphi_1(\rho_1); \ldots; q_2(\rho_1), r_2(\rho_1)$ sera:

$$(1^{\mathrm{IV}}) \left\{ \begin{array}{ll} \mathrm{I} & \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{d\vartheta_1}{d\rho_1} = \dfrac{\partial H_1}{\partial \theta_1} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}, & \dfrac{d\varphi_1}{d\rho_1} = \dfrac{\partial H_1}{\partial \Phi_1} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}; \\ \dfrac{d\theta_1}{d\rho_1} = -\dfrac{\partial H_1}{\partial \vartheta_1} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}, & \dfrac{d\Phi_1}{d\rho_1} = -\dfrac{\partial H_1}{\partial \varphi_1} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}; \end{array} \right. \\ \mathrm{II} & \left\{ \begin{array}{lll} \dfrac{dx_2}{d\rho_1} = \dfrac{\partial H_2}{\partial p_2} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}, & \dfrac{dy_2}{d\rho_1} = \dfrac{\partial H_2}{\partial q_2} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}, & \dfrac{dz_2}{d\rho_1} = \dfrac{\partial H_2}{\partial r_2} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}; \\ \dfrac{dp_2}{d\rho_1} = -\dfrac{\partial H_2}{\partial x_2} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}, & \dfrac{dq_2}{d\rho_1} = -\dfrac{\partial H_2}{\partial y_2} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}, & \dfrac{dr_2}{d\rho_1} = -\dfrac{\partial H_2}{\partial z_2} : \dfrac{\partial H_1}{\partial P_1}. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

II. *Remarques générales à l'égard des équations obtenues.* — Après avoir intégré ces équations, on pourra, d'après l'intégrale $H = h$, exprimer P_1 par ρ_1. Enfin, en remplaçant toutes les fonctions, dont dépend le second membre de l'équation $\frac{dt}{d\rho_1} = 1 : \frac{\partial H_1}{\partial P_1}$, par leurs valeurs obtenues, nous pourrons avoir, par une seule quadrature, la fonction ρ_1 et toutes les autres caractéristiques du mouvement exprimées au moyen de t.

Ce qui nous importe le plus c'est de mettre en évidence le caractère analytique des intégrales dans le voisinage de $\rho_1 = 0$.

D'après le théorème de M. Painlevé on est assuré, que le long de toute trajectoire (où $\frac{d\rho_1}{dt}$ ne soit pas identiquement nulle) le mouvement ne cesse pas d'être régulier, c'est-à-dire, les intégrales sont toujours des fonctions holomorphes. Au contraire, on ne sait rien, si les points se meuvent le long des trajectoires singulières. Dans le paragraphe suivant nous verrons, qu'elles sont caractérisées univoquement par les intégrales du système (1^{IV}), qui sont holomorphes dans le domaine de $\rho_1 = 0$ (bien entendu, ce point au plus excepté).

§ 4. Forme définitive des équations.

I. *Nouvelle transformation de variables.* — Dans le système (1^{IV}) remplaçons les variables $\rho_1, P_1, \theta_1, \Phi_1$ par des nouvelles $r, R, \vartheta_1', \varphi_1'$, liées aux premières par les relations:

$$(15) \qquad r = \sqrt{\rho_1}, \qquad R = -rP_1, \qquad \vartheta_1' = \frac{\theta_1}{r^4}, \qquad \varphi_1' = \frac{\Phi_1}{r^4 \sin^2 \vartheta_1}.$$

La signification des variables ϑ_1', φ_1' est bien simple.

Écrivons à cet effet:

$$\vartheta_1' = \frac{\theta_1}{\rho_1} : \rho_1, \qquad \varphi_1' = \frac{\Phi_1}{\rho_1 \sin \vartheta_1} : \rho_1 \sin \vartheta_1,$$

et rappelons-nous que $\frac{\theta_1}{\rho_1}$ et $\frac{\Phi_1}{\rho_1 \sin \vartheta_1}$ sont les composantes de la vitesse rèlative de P_1 selon les lignes polaires ϑ_1, φ_1 (v. § 1, n° 4).

Nous tirerons tout court, que ϑ_1' et φ_1' sont respectivement les vitesses angulaires des projections de P_0P_1 sur les plans $\varphi_1 = \text{const.}$, $\vartheta_1 = \frac{\pi}{2}$.

La première des (15) nous donne:

$$(16) \qquad d\rho_1 = 2r\,dr.$$

En outre, ayant égard aux expressions (2''') de H_1 et H_2:

$$(17_a) \qquad \frac{\partial H_1}{\partial P_1} = P_1 = -\frac{R}{r},$$

$$(17_b) \qquad \frac{\partial H_1}{\partial \Theta_1} = \frac{\Theta_1}{\rho_1^2} = \frac{\Theta_1}{r^4} = \vartheta_1',$$

$$(17_c) \qquad \frac{\partial H_1}{\partial \Phi_1} = \frac{\Phi_1}{\rho_1^2 \sin^2\vartheta_1} = \frac{\Phi_1}{r^4 \sin^2\vartheta_1} = \varphi_1'.$$

$$\frac{\partial H_1}{\partial \vartheta_1} = -\frac{\Phi_1^2 \cos\vartheta_1}{\rho_1^2 \sin^3\vartheta_1} + \mu_1 m_1 m_2 \frac{1}{\Delta^2}\frac{\partial \Delta}{\partial \vartheta_1} + \frac{m_2 \rho_1}{\rho_2^3}\frac{\partial \nabla_1}{\partial \vartheta_1} - \frac{m_1 m_2}{m_0}\frac{1}{\Delta^2}\frac{\partial \Delta}{\partial \vartheta_1}.$$

Si nous calculons $\frac{\partial \Delta}{\partial \vartheta_1}$, en nous servant des (8), nous trouvons:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \vartheta_1} = \frac{1}{\Delta}\{(\rho_1 \sin\vartheta_1 \cos\varphi_1 - x_2)\rho_1 \cos\vartheta_1 \cos\varphi_1 + (\rho_1 \sin\vartheta_1 \sin\varphi_1 - y_2)\rho_1 \cos\vartheta_1 \sin\varphi_1$$
$$- (\rho_1 \cos\vartheta_1 - z_2)\sin\vartheta_1\}$$

$$= -\frac{1}{\Delta}\rho_1\{x_2 \cos\vartheta_1 \cos\varphi_1 + y_2 \cos\vartheta_1 \sin\varphi_1 - z_2 \sin\vartheta_1\} = -\frac{\rho_1}{\Delta}\frac{\partial \nabla_1}{\partial \vartheta_1}.$$

Par conséquent:

$$\frac{\partial H_1}{\partial \vartheta_1} = -\frac{\Phi_1^2 \cos\vartheta_1}{\rho_1^2 \sin^3\vartheta_1} + m_2 \frac{\partial \nabla_1}{\partial \vartheta_1}\left(\frac{\rho_1}{\rho_2^3} - \frac{\rho_1}{\Delta^3}\right),$$

ou même, d'après (15):

$$(17_d) \qquad \frac{\partial H_1}{\partial \vartheta_1} = r^4\left\{-\varphi_1'^2 \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_1 + \frac{m_2}{r^2}\left(\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\Delta^3}\right)\frac{\partial \nabla_1}{\partial \vartheta_1}\right\}.$$

Par un calcul analogue on pourrait obtenir:

$$(17_e) \qquad \frac{\partial H_1}{\partial \varphi_1} = m_2 r^2\left(\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\Delta^3}\right)\frac{\partial \nabla_1}{\partial \varphi_1}.$$

En envisageant les dérivées de H_2 par rapport aux variables du second point, on a:

$$\frac{\partial H_2}{\partial p_2} = \mu_2 p_2 + \frac{1}{m_0 \mu_1} \frac{\partial \nabla_2}{\partial p_2}$$

$$= \mu_2 p_2 + \frac{1}{m_0 \mu_1} \left(P_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 + \frac{\theta_1}{\rho_1} \cos \vartheta_1 \cos \varphi_1 - \frac{\Phi_1}{\rho_1 \sin \vartheta_1} \sin \varphi_1 \right).$$

$$(17_t) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial H_2}{\partial p_2} &= \frac{1}{r} \left\{ r\mu_2 p_2 + \frac{1}{m_0 \mu_1} (- R \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 + r^2 \vartheta_1' \cos \vartheta_1 \cos \varphi_1 \right. \\ &\qquad \left. - r^2 \varphi_1' \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1) \right\}, \\ \frac{\partial H_2}{\partial q_2} &= \frac{1}{r} \left\{ r\mu_2 q_2 + \frac{1}{m_0 \mu_1} (- R \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 + r^2 \vartheta_1' \cos \vartheta_1 \sin \varphi_1 \right. \\ &\qquad \left. + r^2 \varphi_1' \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1) \right\}, \\ \frac{\partial H_2}{\partial r_2} &= \frac{1}{r} \left\{ r\mu_2 r_2 + \frac{1}{m_0 \mu_1} (- R \cos \vartheta_1 - r^2 \vartheta_1' \sin \vartheta_1) \right\}; \end{aligned} \right.$$

$$(17_K) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial H_2}{\partial x_2} &= \frac{m_0 m_2}{\rho_2^3} x_2 - \frac{m_1 m_2 (r^2 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 - x_2)}{\Delta^3}, \\ \frac{\partial H_2}{\partial y_2} &= \frac{m_0 m_2}{\rho_2^3} y_2 - \frac{m_1 m_2 (r^2 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1 - y_2)}{\Delta^3}, \\ \frac{\partial H_2}{\partial z_2} &= \frac{m_0 m_2}{\rho_2^3} z_2 - \frac{m_1 m_2 (r^2 \cos \vartheta_1 - z_2)}{\Delta^3}. \end{aligned} \right.$$

En vertu de l'égalité (16) et des relations (17_a), (17_b), la première des équations du mouvement peut s'écrire:

$$\frac{d\vartheta_1}{2r\,dr} = \frac{\vartheta_1'}{-\frac{R}{r}},$$

ou bien:

$$(18_a) \qquad \frac{d\vartheta_1}{dr} = -2r^2 \frac{\vartheta_1'}{R}.$$

D'une manière analogue la deuxième s'écrit:

$$(18_b) \qquad \frac{d\varphi_1}{dr} = -2r^2 \frac{\varphi_1'}{R}.$$

En dérivant la quatrième des (15) par rapport à r, et en se servant de (16), on a:

$$\frac{d\vartheta_1'}{dr} = -\frac{4\Theta_1}{r^5} + \frac{1}{r^4}\frac{d\Theta_1}{dr} = -\frac{4}{r}\vartheta_1' + \frac{2}{r^3}\frac{d\Theta_1}{d\rho_1}.$$

Si nous avons égard à l'équation $\frac{d\Theta_1}{d\rho_1} = -\frac{\partial H_1}{\partial \vartheta_1} : \frac{\partial H_1}{\partial P_1}$ du système (1^{IV}) et aux (17_a), (17_d), l'égalité précédente nous donne:

$$(18_c)\qquad r\frac{d\vartheta_1'}{dr} = -4\vartheta_1' + \frac{2r^3}{R}\left\{-\varphi_1'^2 \sin\vartheta_1\cos\vartheta_1 + \frac{m_2}{r^2}\left(\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\Delta^3}\right)\frac{\partial\nabla_1}{\partial\vartheta_1}\right\}.$$

De la même manière on a:

$$\frac{d\varphi_1'}{dr} = -\frac{4\Phi_1}{r^5\sin^2\vartheta_1} - \frac{2\Phi_1}{r^4\sin^3\vartheta_1}\cos\vartheta_1\frac{d\vartheta_1}{dr} + \frac{1}{r^4\sin^2\vartheta_1}\frac{d\Phi_1}{dr}$$

$$= -\frac{4\varphi_1'}{r} - \frac{2\varphi_1'\cos\vartheta_1}{\sin\vartheta_1}\frac{d\vartheta_1}{dr} + \frac{2}{r^3\sin^2\vartheta_1}\frac{d\Phi_1}{d\rho_1}.$$

En éliminant $\frac{d\vartheta_1}{dr}$, au moyen de (18_a), et en remplaçant $\frac{d\Phi_1}{d\rho_1}$ par l'expression, qui est fournie par la quatrième des ((1^{IV}), I) et par les (17_a), (17_e), on a:

$$(18_d)\qquad r\frac{d\varphi_1'}{dr} = -4\varphi_1' + \frac{2r^3}{R}\left\{\frac{1}{\sin^2\vartheta_1}\left[-\varphi_1'\vartheta_1'\frac{\sin 2\vartheta_1}{2} + \frac{m_2}{r^2}\left(\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\Delta^3}\right)\frac{\partial\nabla_1}{\partial\vartheta_1}\right]\right\}.$$

Pour les équations du second groupe la transformation est immédiate, de sorte que nous n'insisterons pas.

Elles deviennent:

$$(18_e)\qquad \frac{dx_2}{dr} = -\frac{2r}{R}\left\{r\mu_2 p_2 + \frac{1}{m_0\mu_1}(-R\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + r^3\vartheta_1'\cos\vartheta_1\cos\varphi_1\right.$$
$$\left. - r^3\varphi_1'\sin\vartheta_1\sin\varphi_1)\right\}, \quad \text{etc.};$$

$$(18_f)\qquad \frac{dp_2}{dr} = -\frac{2r^2}{R}\left\{\frac{m_0 m_2}{\rho_2^3}x_2 - \frac{m_1 m_2(r^2\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 - x_2)}{\Delta^3}\right\}, \quad \text{etc.}$$

Posons maintenant:

$$
(19)\quad \begin{cases}
\beta_1 = -\varphi_1'^2 \dfrac{\sin 2\vartheta_1}{2} + \dfrac{m_2}{r^2}\left(\dfrac{1}{\rho_2^3} - \dfrac{1}{\Delta^3}\right)\dfrac{\partial \nabla_1}{\partial \vartheta_1}, \\[2ex]
\beta_2 = \dfrac{1}{\sin^2 \vartheta_1}\left[-\varphi_1'\vartheta_1'\dfrac{\sin 2\vartheta_1}{2} + \dfrac{m_2}{r^2}\left(\dfrac{1}{\rho_2^3} - \dfrac{1}{\Delta^3}\right)\dfrac{\partial \nabla_1}{\partial \varphi_1}\right], \\[2ex]
\alpha_1 = r\vartheta_1', \\[1ex]
\alpha_2 = r\varphi_1', \\[1ex]
\alpha_3 = r\mu_2 p_2 + \dfrac{1}{m_0\mu_1}(-R\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + r^3\vartheta_1'\cos\vartheta_1\cos\varphi_1 - r^3\varphi_1'\sin\vartheta_1\sin\varphi_1), \\[2ex]
\alpha_4 = r\mu_2 q_2 + \dfrac{1}{m_0\mu_1}(-R\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + r^3\vartheta_1'\cos\vartheta_1\sin\varphi_1 + r^3\varphi_1'\sin\vartheta_1\cos\varphi_1), \\[2ex]
\alpha_5 = r\mu_2 r_2 + \dfrac{1}{m_0\mu_1}(-R\cos\vartheta_1 \qquad\qquad - r^3\vartheta_1'\sin\vartheta_1), \\[2ex]
\alpha_6 = r\left\{\dfrac{m_0 m_2}{\rho_2^3}x_2 - \dfrac{m_1 m_2(r^2\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 - x_2)}{\Delta^3}\right\}, \\[2ex]
\alpha_7 = r\left\{\dfrac{m_0 m_2}{\rho_2^3}y_2 - \dfrac{m_1 m_2(r^2\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 - y_2)}{\Delta^3}\right\}, \\[2ex]
\alpha_8 = r\left\{\dfrac{m_0 m_2}{\rho_2^3}z_2 - \dfrac{m_1 m_2(r^2\cos\vartheta_1 - z_2)}{\Delta^3}\right\}.
\end{cases}
$$

Écrivons, à la place de $\vartheta_1(r), \varphi_1(r), x_2(r), y_2(r), z_2(r), p_2(r), q_2(r), r_2(r)$, respectivement $\lambda_1(r), \lambda_2(r), \ldots, \lambda_8(r)$. Alors, puisque $\vartheta_1'(r) = \dfrac{d\vartheta_1(r)}{dt}$ et $\varphi_1'(r) = \dfrac{d\varphi_1(r)}{dt}$, nous pourrons encore remplacer $\vartheta_1'(r)$ et $\varphi_1'(r)$ par $\lambda_1'(r)$ et $\lambda_2'(r)$.

D'après $(18_a), \ldots, (18_f)$ et (19) le système transformé de (1^{IV}) sera enfin:

$$
(\mathrm{S})\quad \begin{cases}
\dfrac{d\lambda_i}{dr} = -2r\dfrac{\alpha_i}{R}, & (i=1,2,\ldots,8) \\[2ex]
r\dfrac{d\lambda_j'}{dr} = -4\lambda_j' + 2r^3\dfrac{\beta_j}{R}. & (j=1,2)
\end{cases}
$$

II. *Comportement des seconds membres des équations* (S) *au voisinage d'une position de choc.* — Il est intéressant de mettre en évidence le comportement, dans le voisinage de $r = 0$, des fonctions α, β introduites par les positions (19).

En vertu de l'identité:

$$\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\Delta^3}\right) = \frac{\Delta - \rho_2}{\rho_1} \frac{\Delta^2 + \rho_2 \Delta + \rho_2^2}{\rho_2^3 \Delta^3}$$

on voit, que, pour $r = 0$, le produit $\frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\Delta^3}\right)$ reste fini. De plus, pour des valeurs finies des variables, $\frac{\partial \nabla_1}{\partial \vartheta_1}$ et $\frac{\partial \nabla_1}{\partial \varphi_1}$ gardent, dans le même domaine, des valeurs finies.

Enfin la fonction:

$$R = - r P_1 = \pm \sqrt{\left\{2(m_0 + m_1) + r^2 \mu_1\left[2\left(h + \frac{m_0 m_1}{\rho_2} + \frac{m_1 m_2}{\Delta}\right) - \mu(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right] - r^6(\vartheta_1'^2 + \varphi_1'^2 \sin^2 \vartheta_1)\right\}},$$

dont l'expression se tire de (10) et de (9), (15), reste différente de zéro, pour r suffisamment petite (v. § 2, n° 1, lemme I). On tire, que les fonctions $\alpha_1, \ldots, \alpha_8, \beta_1$ sont régulières pour des valeurs finies des arguments et dans le domaine de $r = 0$. Mais on ne peut rien dire, *a priori,* à l'égard de β_2, car elle est affectée par le diviseur $\sin \vartheta_1$, qui peut s'annuler.

Si l'on pouvait démontrer, que, pour $t = t_1$, la fonction $\vartheta_1' = \frac{d\vartheta_1}{dt}$ reste finie, on pourrait conclure, que ϑ_1 tendrait, pour cette valeur du temps, vers une valeur déterminée et finie.[1] Si, par hasard, cette valeur annulait $\sin \vartheta_1$, il suffirait de changer l'orientation des axes x, y, z pour éviter ce cas exceptionnel.

Mais, répétons-le, à cette conclusion on arriverait seulement après avoir démontré, que ϑ_1' reste finie.

En nous servant des hypothèses: $\lim_{t=t_1} r = 0$, et limite inférieure de ρ_2 (dans le domaine de $t = t_1$) plus grande que zéro, nous avons tâché de

[1] Il suffirait d'appliquer la méthode suivie dans le § 2, n° 1.

donner cette démonstration. Nous devons cependant avouer que nos efforts ont été sans résultat.

C'est notre convinction, que la propriété ci-dessus soit vraie. Les raisons, qui nous engagent dans cette opinion, sont principalement deux: I. Dans le cas du problème restreint la propriété est vérifiée. II. L'intuition physique du phénomène du choc des deux points P_0P_1 nous fait voir que, lorsque la distance P_0P_1 sera réduite suffisamment petite (par rapport à la distance P_0P_2), le troisième point aura une influence presque nulle sur le mouvement relatif des deux premiers. C'est-à-dire, P_0, P_1 se mouvront, l'un par rapport à l'autre, selon les lois du mouvement newtonien de deux points. Si l'on admet donc, qu'ils doivent se choquer au bout du temps t_1, on est entraîné à penser, que P_1, dans le voisinage de P_0, suit, par une grande approximation, une des trajectoires de choc dans le mouvement non-troublé. Mais ces trajectoires sont des droites sortant de P_0, par conséquent les fonctions ϑ_1, φ_1 et leurs dérivées ϑ_1', φ_1' tendront vers des limites finies.[1]

En résumé nous pouvons donc retenir, que la fonction β_2, comme toutes les autres, sera régulière, dans le voisinage de $r = 0$, pour toutes les valeurs finies de ses arguments.

Nous en tirons, que les seconds membres des équations du système (S) sont réguliers dans ce domaine des variables. La valeur $r = 0$ sera donc singulière, pour les intégrales du problème des trois corps, parce que les premiers membres des deux dernières équations contiennent le facteur r.

§ 5. *Intégrales qui correspondent aux trajectoires singulières.*

I. *Théorème d'existence.* — *Le système* (S) *admet, dans le domaine de* $r = 0$, ∞^8 *intégrales holomorphes, dont* λ_1' *et* λ_2', *pour* $r = 0$, *se réduisent égales à zéro, tandis que les autres prennent des valeurs constantes arbitraires.*

Remarquons tout de suite, qu'un système d'intégrales holomorphes de (S) doit satisfaire à ces équations même pour la valeur zéro de la

[1] Nous aurions pu admettre que $\lim\limits_{t=t_1} \vartheta_1' = \lim\limits_{t=t_1} \varphi_1' = 0$, mais nous nous contentons d'une hypothèse moins restrictive, car nous verrons, qu'elle nous suffit pour pouvoir en tirer, que les deux dérivées tendent vers zéro.

variable indépendante. Mais, comme les deux dernières équations s'écrivent tout simplement, pour cette valeur: $\lambda_1' = 0$, $\lambda_2' = 0$, il faudra qu'on ait précisément $\lambda_1'(0) = 0$, $\lambda_2'(0) = 0$. Après cela nous pouvons encore remarquer, que la forme particulière de nos équations nous permet de déterminer, au moyen d'elles, les successifs coefficients des séries, qui donnent les développements des fonctions au voisinage de $r = 0$.

Nous pourrons affirmer en outre, que ces coefficients seront des fonctions périodiques par rapport aux valeurs initiales $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}$ des λ_1, λ_2. En effet les seconds membres des équations peuvent évidemment être envisagés comme des fonctions régulières de $r, \lambda_i, \lambda_i^{(0)}, \lambda_1', \lambda_2'$ et, par conséquent, périodiques par rapport à $\lambda_1^{(0)}$ et $\lambda_2^{(0)}$, car λ_1 et λ_2 entrent au moyen de fonctions trigonométriques.

Comme nous aurons construit les séries, il faudra s'assurer, pour la démonstration du théorème, qu'elles sont convergentes.

A ce but écrivons le système (S) sous la forme:

$$(\mathrm{S}')\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{d(\lambda_i - \lambda_i^{(0)})}{dr} = -2r\frac{\alpha_i}{R}, && (i=1,2,\ldots,8)\\ &r\frac{d\lambda_j'}{dr} = -4\lambda_j' + 2r^3\frac{\beta_j}{R}. && (j=1,2)\end{aligned}\right.$$

Posons en outre:

$$\lambda_i - \lambda_i^{(0)} = \nu_i, \qquad (i=1,2,\ldots,8)$$

et envisageons des fonctions

$$\mathfrak{L}_j(r, \nu_1, \ldots, \nu_8, \lambda_1', \lambda_2'), \qquad (j=1,2)$$

$$\mathfrak{N}_i(r, \nu_1, \ldots, \nu_8, \lambda_1', \lambda_2'), \qquad (i=1,2,\ldots,8)$$

qui soient *majorants* des fonctions $2r^3\frac{\beta_j}{R}$, $-2r\frac{\alpha_i}{R}$.

Il viendra que le système:

$$(\mathrm{S}'')\qquad \left\{\begin{aligned} &r\frac{d\lambda_j'}{dr} = -4\lambda_j' + r\mathfrak{L}_j, && (j=1,2)\\ &\frac{d\nu_i}{dr} = \mathfrak{N}_i && (i=1,2,\ldots,8)\end{aligned}\right.$$

sera *majorant* de (S'). Pour démontrer notre théorème, il faudra donc que nous fassions voir, que (S'') admet une solution régulière $\lambda_j'(r), \nu_i(r)$, qui pour $r = 0$ devient: $\lambda_j'(0) = 0, \nu_i(0) = 0$.

Si nous nous proposons de construire les séries de TAYLOR correspondantes aux fonctions λ_j', ν_i, nous trouvons, que leurs coefficients sont donnés par les relations:

$$(S''') \qquad \begin{cases} \dfrac{d^n\lambda_j'}{dr^n} = \dfrac{n}{n+4}\dfrac{d^{n-1}\mathfrak{L}_j}{dr^{n-1}}, \\[2ex] \dfrac{d^n\nu_i}{dr^n} = \dfrac{d^{n-1}\mathfrak{N}_i}{dr^{n-1}}. \end{cases} \qquad \begin{matrix} (j=1,2) \\ (i=1,2,\ldots,8) \\ (n=1,2,\ldots) \end{matrix}$$

Elles ont été deduites par les équations (S'') en dérivant le premier groupe n fois par rapport à r, le second $n - 1$ fois, et en posant $r = 0$.

Si l'on remarque, que les fonctions $\mathfrak{L}_j$ sont majorantes des fonctions $\dfrac{n}{n+4}\mathfrak{L}_j$, on tire que le système:

$$(S^{IV}) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^n\lambda_j'}{dr^n} = \dfrac{d^{n-1}\mathfrak{L}_j}{dr^{n-1}}, \\[2ex] \dfrac{d^n\nu_i}{dr^n} = \dfrac{d^{n-1}\mathfrak{N}_i}{dr^{n-1}} \end{cases} \qquad \begin{matrix} (j=1,2) \\ (i=1,2,\ldots,8) \\ (n=1,2,\ldots) \end{matrix}$$

est majorant de (S'''). De la sorte le système

$$(S^{V}) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda_j}{dr} = \mathfrak{L}_j, & (j=1,2) \\[2ex] \dfrac{d\nu_i}{dr} = \mathfrak{N}_i, & (i=1,2,\ldots,8) \end{cases}$$

qui correspond à (S^{IV}) sera, *a fortiori*, majorant de (S). Mais les équations de (S^{V}) sont toutes régulières dans le voisinage de $r = 0$, par conséquent ce dernier système admettra certainement une solution holomorphe s'annulant pour $r = 0$.[1] Le théorème est donc démontré.

II. *Toutes les solutions du système* (S) *sont holomorphes.* — Nous pouvons maintenant nous faire la question: Le système (S) admet-il d'autres solutions hors de celles, dont nous venons de démontrer l'existence?

---

[1] V. PICARD. *Traité d'analyse*, a. 1892. T. II, Ch. XI, p. 308.

Pour y repondre il faut démontrer le théorème:

Hors des solutions holomorphes, il n'y a pas d'autres solutions, pour lesquelles on ait $\lambda_1'(0) = \lambda_2'(0) = 0$.

Nous employerons pour la démonstration un procédé, qui est une généralisation d'un procédé analogue, donné, dans son mémoire, par M. Levi-Civita (loc. c., p. 17).

Il faudra, à ce but, que nous donnions auparavant aux équations de (S) une forme convenante.

Le comportement des solutions holomorphes du système (S), dans le domaine de $r = 0$, nous permet de mettre celles-ci sous la forme:

$$(20)\qquad \begin{cases} \lambda_i - \lambda_i^{(0)} = r A_i\,(r, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_8^{(0)}), & (i=1,2,\ldots,8) \\ \lambda_j' = r A_j^{(1)}(r, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_8^{(0)}). & (j=1,2) \end{cases}$$

Il va sans dire, que $A_i(r\,|\,\lambda_i^{(0)})$ et $A_j^{(1)}(r\,|\,\lambda_i^{(0)})$ sont des fonctions régulières, par rapport à leurs arguments, au voisinage de $r = 0$. Elles sont de plus périodiques par rapport à $\lambda_1^{(0)}$ et $\lambda_2^{(0)}$.

Si nous posons maintenant:

$$(21)\qquad \begin{cases} \lambda_i = \lambda_i^{(0)} + r A_i\,(r, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_8^{(0)}), & (i=1,2,\ldots,8) \\ \lambda_j' = u_j \;+ r A_j^{(1)}(r, \lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_8^{(0)}), & (j=1,2) \end{cases}$$

nous obtenons un système d'équations, qui peut nous fournir, dans le voisinage de $r = 0$, les quantités $\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}, \ldots, \lambda_8^{(0)}, u_1, u_2$ en fonction de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_8, \lambda_1', \lambda_2'$.[1]

---

[1] Pour s'en assurer il suffit de remarquer que:

$$\frac{\partial \lambda_r}{\partial \lambda_s^{(0)}} = \varepsilon_{rs} + r\frac{\partial A_r}{\partial \lambda_s^{(0)}}, \qquad \frac{\partial \lambda_r}{\partial u_j} = 0, \qquad \frac{\partial \lambda_l'}{\partial \lambda_s^{(0)}} = r\frac{\partial A_l^{(1)}}{\partial \lambda_s^{(0)}}, \qquad \frac{\partial \lambda_l'}{\partial u_j} = \varepsilon_{lj},$$

$$(r, s = 1, 2, \ldots, 8;\; l, j = 1, 2)$$

où le symbole ε_{rs} dénote l'unité ou le zéro, selon que les deux indices r, s sont égaux ou différents. On peut de plus observer, que les dérivées des fonctions A_r, $A_l^{(1)}$ (régulières, comme nous l'avons vu tout à l'heure) sont finies dans le domaine de $r = 0$. On a de la sorte, que le déterminant jacobien $\dfrac{d(\lambda_1, \ldots, \lambda_8, \lambda_1', \lambda_2')}{d(\lambda_1^{(0)}, \ldots, \lambda_8^{(0)}, u_1, u_2)}$ reste, dans ce domaine, différent de zéro, car tous ses élements principaux se réduissent, pour $r = 0$, à l'unité, tandis que les autres s'annulent.

A ce propos remarquons, que les huit équations du premier groupe dépendent seulement des deux séries de variables λ_i, $\lambda_i^{(0)}$ et elles envisagent une vraie substitution entre les deux séries mêmes. Pour résoudre le système (21), on peut donc tirer du premier groupe $\lambda_i^{(0)}$ en fonction de λ_i, et substituer ces valeurs dans les deux autres. Ces dernières peuvent être envisagées comme déjà résolues par rapport à u_1 et u_2.

Il vient ainsi:

$$(22)\quad \begin{cases} \lambda_i^{(0)} = \lambda_i + r\mathcal{A}_i\,(r, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_8), & (i=1,2,\ldots,8) \\ u_j = \lambda_j' - r\mathcal{A}_j^{(1)}(r, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_8). & (j=1,2) \end{cases}$$

Il est important de remarquer, que $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{A}_j^{(1)}$ doivent être des fonctions régulières par rapport à leurs arguments, et périodiques par rapport à λ_1 et λ_2 avec la période 2π.

En effet, d'après les équations (20) et (22), on a:

$$(23)\qquad -A_i(r\,|\,\lambda_i^{(0)}) = \mathcal{A}_i(r\,|\,\lambda_i). \qquad (i=1,2,\ldots,8)$$

Ayant égard à la périodicité des A_i par rapport a $\lambda_1^{(0)}$, $\lambda_2^{(0)}$, on peut écrire:

$$A_i(r, \lambda_1^{(0)} + 2\pi, \lambda_2^{(0)} + 2\pi, \lambda_3^{(0)}, \ldots, \lambda_8^{(0)}) = A_i(r\,|\,\lambda_i^{(0)}), \qquad (i=1,2,\ldots,8)$$

et, en vertu de (23):

$$-A_i(r, \lambda_1^{(0)} + 2\pi, \lambda_2^{(0)} + 2\pi, \lambda_3^{(0)}, \ldots, \lambda_8^{(0)}) = \mathcal{A}_i(r, \lambda_1 + 2\pi, \lambda_2 + 2\pi, \lambda_3, \ldots, \lambda_8), \qquad (i=1,2,\ldots,8)$$

de sorte que l'on tirera enfin:

$$\mathcal{A}_i(r, \lambda_1 + 2\pi, \lambda_2 + 2\pi, \lambda_3, \ldots, \lambda_8) = \mathcal{A}_i(r\,|\,\lambda_i). \qquad (i=1,2,\ldots,8)$$

Ces relations nous confirment, que les fonctions $\mathcal{A}_i$ sont périodiques par rapport à λ_1 et λ_2. Alors, d'après la méthode suivie pour la résolution des équations (21), on est autorisé de conclure que $\mathcal{A}_1^{(1)}$ et $\mathcal{A}_2^{(1)}$ jouissent de la même propriété.

Écrivons maintenant le système différentiel, qui définit les nouvelles fonctions.

En dérivant les équations (22) par rapport à r, on a:

$$\frac{d\lambda_i^{(0)}}{dr} = \frac{d\lambda_i}{dr} + \frac{d(r\bar{A}_i)}{dr} = \frac{d\lambda_i}{dr} + \frac{\partial(r\bar{A}_i)}{\partial r} + r\sum_1^8{}_s \frac{\partial \bar{A}_i}{\partial\lambda_s}\frac{d\lambda_s}{dr}, \qquad (i=1,2,\ldots,8)$$

$$\frac{du_j}{dr} = \frac{d\lambda_j'}{dr} - \frac{d(r\bar{A}_j^{(1)})}{dr} = \frac{d\lambda_j'}{dr} - \frac{\partial(r\bar{A}_j^{(1)})}{\partial r} - r\sum_1^8{}_s \frac{\partial \bar{A}_j^{(1)}}{\partial\lambda_s}\frac{d\lambda_s}{dr}. \qquad (j=1,2)$$

Aux derivées de λ_i, λ_j' on doit substituer leurs valeurs données par les équations de (S) et, ensuite, remplacer partout les anciennes par les nouvelles variables.

On trouve ainsi:

$$\frac{d\lambda_i^{(0)}}{dr} = -2r\frac{\alpha_i}{R} + \frac{\partial(r\bar{A}_i)}{\partial r} - \frac{2r^2}{R}\sum_1^8{}_s \frac{\partial \bar{A}_i}{\partial\lambda_s}\alpha_s, \qquad (i=1,2,\ldots,8)$$

$$\frac{du_j}{dr} = -\frac{4}{r}(u_j + r\bar{A}_j^{(1)}) + 2r^2\frac{\beta_j}{R} - \frac{\partial(r\bar{A}_j^{(1)})}{\partial r} - \frac{2r^2}{R}\sum_1^8{}_s \frac{\partial \bar{A}_j^{(1)}}{\partial\lambda_s}\alpha_s. \qquad (j=1,2)$$

Le système transformé du système (S) peut s'écrire par conséquent:

$$(24) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda_i^{(0)}}{dr} = A_i, & (i=1,2,\ldots,8) \\[2ex] r\dfrac{du_j}{dr} = -4u_j + rB_j. & (j=1,2) \end{cases}$$

A_i et B_j sont évidemment des fonctions régulières des arguments r, $\lambda_i^{(0)}$, u_j dans le domaine de $r=0$ et périodiques par rapport à $\lambda_1^{(0)}$, $\lambda_2^{(0)}$.

Il faut ajouter encore une remarque. Pour intégrer le système (S) on peut d'abord intégrer les équations (24) et substituer, ensuite, à la place de $\lambda_i^{(0)}$ et u_j dans les (21) les intégrales trouvées. Si, parmi les solutions de (S), nous voulons celles, qui pour $r=0$ fournissent $\lambda_1'=0$, $\lambda_2'=0$, il suffit, d'après (21), de déterminer les intégrales de (24), qui satisfont aux deux conditions $u_1(0)=0$, $u_2(0)=0$. En particulier, si l'on veut les intégrales de (S) holomorphes dans le domaine de $r=0$, il faut déterminer de telles intégrales de (24), en vertu desquelles les relations (21) coïncident avec les (20) identiquement, c'est-à-dire pour quelque valeur de r que ce soit. Mais cette identité a lieu seulement, si, pour toute valeur de r, $\lambda_i^{(0)} = \text{const.}$, $u_j=0$, par conséquent on conclut que

$$(25) \qquad \lambda_i^{(0)} = \text{const.}, \qquad u_j = 0$$

constituent un système d'intégrales particulières des (24). Si nous remplaçons dans ces équations les fonctions inconnues par les valeurs (25), nous trouvons:

$$(A_i) = 0, \qquad r(B_j) = 0, \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\dots,8;\, j=1,2)}$$

ayant designé par les symboles (A_i), (B_j) les fonctions A_i, B_j après cette substitution.

Pour que ces deux conditions soient verifiées quel que soit r, il faut et il suffit que l'on ait:

$$A_i = u_1 A_i^{(1)} + u_2 A_i^{(2)}, \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\dots,8)}$$

$$B_j = u_1 B_j^{(1)} + u_2 B_j^{(2)}. \qquad {\scriptstyle (j=1,2)}$$

Le système (24) s'écrira donc enfin:

$$(\Sigma) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\lambda_i^{(0)}}{dr} = u_1 A_i^{(1)} + u_2 A_i^{(2)}, & {\scriptstyle (i=1,2,\dots,8)} \\[2mm] r\dfrac{du_j}{dr} = -4u_j + r(u_1 B_j^{(1)} + u_2 B_j^{(2)}). & {\scriptstyle (j=1,2)} \end{cases}$$

Il est aisé de se convaincre, que les fonctions $A_i^{(1)}$, $A_i^{(2)}$, $B_j^{(1)}$, $B_j^{(2)}$ sont elles mêmes régulières pour r assez petite et périodiques par rapports aux $\lambda_1^{(0)}$, $\lambda_2^{(0)}$.

D'après la remarque faite tout à l'heure à propos de la relation entre les solutions de (S), telles que $\lambda_1'(0) = \lambda_2'(0) = 0$, et les intégrales de (Σ), qui peuvent les engendrer, il est évident, que notre théorème sera démontré, si nous prouverons que le système (Σ) ne peut pas avoir des solutions réelles, qui pour $r = 0$ fournissent $u_1 = 0$, $u_2 = 0$.

Plus précisément il faudra prouver, que, si cela se vérifie, u_1 et u_2 doivent s'annuler identiquement, c'est-à-dire, que nous devons retrouver les solutions holomorphes de (S).

Puisque les fonctions $B_j^{(1)}$, $B_j^{(2)}$ sont régulières dans le domaine des valeurs $u_1 = u_2 = r = 0$, nous pourrons déterminer un nombre positif ε, tel que pour

$$r \leqq \varepsilon, \qquad |u_1| \leqq \varepsilon, \qquad |u_2| \leqq \varepsilon,$$

elles soient développables en séries de puissances de u_1, u_2, r.

En particulier on pourra écrire:

$$(26) \qquad B_j^{(k)} = b_j^{(k)} + \sum_1^2{}_s b_{j,s}^{(k)} u_s + \sum_1^2{}_{st} b_{j,st}^{(k)} u_s u_t + \dots \qquad (j, k = 1, 2)$$

En substituant ces valeurs dans les deux équations du second groupe de (Σ) on obtient:

$$r \frac{du_j}{dr} = -4u_j + r \sum_1^2{}_k \{u_k b_j^{(k)} + \mathbf{2}\}. \qquad (j = 1, 2)$$

Le symbole $\mathbf{n}$ remplace, comme d'habitude, l'ensemble des termes de $n^{\text{ième}}$ ordre par rapport aux u_j.

En multipliant les deux membres de ces équations par u_j, et en ajoutant, on a:

$$r \sum_1^2{}_j u_j \frac{du_j}{dr} = -4 \sum_1^2{}_j u_j^2 + \sum_1^2{}_j u_j \sum_1^2{}_k \{u_k b_j^k + \mathbf{2}\}.$$

Et, en posant

$$U^2 = u_1^2 + u_2^2,$$

nous pouvons écrire enfin:

$$(27) \qquad \frac{r}{2} \frac{dU}{dr} = -4U^2 + r\left\{ \sum_1^2{}_{jk} b_j^k u_j u_k + \mathbf{3} \right\}.$$

Supposons maintenant que les fonctions u_j ne soient pas, au voisinage de $r = 0$, identiquement nulles. Il y aura alors des valeurs r_0, aussi petites que l'on veut, pour lesquelles:

$$U^2(r_0) = u_1^2(r_0) + u_2^2(r_0) > 0.$$

Par hypothèse les fonctions u_j tendent vers zéro en même temps que r. Nous pourrons donc choisir une valeur r_0, telle que u_1, u_2 soient régulières dans l'intervalle $(0, r_0)$, et en outre les développements (26) soiént valables. Il va sans dire, que l'on doit excepter au plus la limite inférieure de cet intervalle.

Puisque la fonction U est régulière pour $r > 0$, et elle ne s'annule pas pour $r = r_0$, on pourra déterminer une valeur $r' < r_0$, telle que dans l'intervalle (r', r_0) on ait toujours $U \neq 0$. Pour toute valeur de r, à l'in-

térieur de cet intervalle, on pourra déduire de l'équation (27):

$$d\log U^2 = -8d\log r + 2\left\{\sum_{jk}^{2} b_j^{(k)}\frac{u_j u_k}{U^2} + \frac{3}{U^2}\right\}dr,$$

ou bien:

$$d\log Ur^4 = \left\{\sum_{jk}^{2} b_j^{(k)}\frac{u_j u_k}{U^2} + \frac{3}{U^2}\right\}dr.$$

Les fonctions $b_j^{(k)}$ sont régulières pour toutes valeurs finies de leurs arguments, et pour r suffisamment petite. On a de la sorte, que la fonction, qui multiplie dr dans l'équation précédente, est intégrable dans notre intervalle. On pourra tirer donc la relation:

$$\log\frac{U(r')r'^4}{U(r_0)r_0^4} = \int_{r_0}^{r'}\left\{\sum_{jk}^{2} b_j^{(k)}\frac{u_j u_k}{U^2} + \frac{3}{U^2}\right\}dr.$$

Comme dans l'intervalle d'intégration $u_1^2 + u_2^2 > 0$, il sera justifié de poser

$$u_1 = U\cos\omega, \qquad u_2 = U\sin\omega.$$

L'égalité précédente pourra donc être écrite:

$$\log\frac{U(r')r'^4}{U(r_0)r_0^4} = \int_{r_0}^{r'}\{b_1^{(1)}\cos^2\omega + (b_1^{(2)} + b_2^{(1)})\sin\omega\cos\omega + b_2^{(2)}\sin^2\omega + Ug(r, U, \omega)\}dr,$$

où g dénote une fonction régulière dans le domaine des valeurs considérées. Dans le second membre de notre égalité il y a donc une fonction, qui reste finie dans ce domaine. Le premier membre, au contraire, tend vers l'infini, si r, en décroissant, passe par une valeur qui annule U; en particulier si r tend vers zéro. C'est là une contradiction évidente, qui nous prouve l'exactitude de notre théorème.

Nous voulons établir maintenant, que:

Dans toute solution de (S), *holomorphe ou non, on doit avoir* $\lim_{t=t_1}\lambda_1' = \lim_{t=t_1}\lambda_2' = 0.$[1]

[1] V. la remarque faite au § 4, n° 2.

La démonstration est identique pour toutes les deux fonctions. Nous nous bornerons donc à la donner seulement pour λ'_1. Considérons parmi les équations de (S):

$$r\frac{d\lambda'_1}{dr} = -4\lambda'_1 + 2r^3\frac{\beta_1}{R},$$

qui peut s'écrire:

$$r^4\frac{d\lambda'_1}{dr} + 4r^3\lambda'_1 = 2r^6\frac{\beta_1}{R},$$

ou bien:

$$\frac{d}{dr}(r^4\lambda'_1) = r^4\frac{2r^2\beta_1}{R}.$$

Le rapport $\frac{2r^2\beta_1}{R}$ reste fini pour des valeurs de r suffisamment près de zéro et pour des valeurs finies des autres variables. Pour s'en convaincre, il suffit de ce rappeler que β_1 reste finie (v. § 4, n° 2) et R ne peut pas s'annuler (v. § 2, n° 1, lemme I). En choisissant une valeur r_0 assez petite, pour que la fonction $\frac{2r^2\beta_1}{R}$ soit intégrable entre r_0 et o, on tirera de l'égalité précédente:

$$[r^4\lambda'_1]_{r=0} - [r^4\lambda'_1]_{r=r_0} = \int_{r_0}^{0} r^4\frac{2r^2\beta_1}{R}\,dr.$$

Mais le produit $r^4\lambda'_1$ s'annule pour $r = 0$, car la fonction

$$r^3\lambda'_1\left(= r^3\vartheta'_1 = \rho_1^{\frac{3}{2}}\frac{\theta_1}{\rho^2} = \frac{\theta_1}{\sqrt{\rho_1}}\right)$$

reste finie (v. § 2, n° 1, lemme I); par conséquent nous pourrons écrire:

$$r_0^4\lambda'_1(r_0) = \int_0^{r_0} r^4\frac{2r^2\beta_1}{R}\,dr,$$

ou même

$$\lambda'_1(r_0) = \int_0^{r_0}\left(\frac{r}{r_0}\right)^4\frac{2r^2\beta_1}{R}\,dr.$$

Si nous remarquons que dans tout l'intervalle d'intégration $\frac{r}{r_0} \leqq 1$, et que de la sorte la fonction à intégrer reste toujours finie, nous déduisons, que le second membre est une fonction régulière de la limite supérieure. Si cette limite tend vers zéro, le premier membre y tendra donc lui même.

Voilà ce que nous devions prouver.

En réunissant les résultats de ce théorème et ceux du précédent, nous pouvons énoncer la propriété:

Dans le domaine de $r = 0$ *le système* (S) *ne peut admettre que des solutions holomorphes.*

III. *Correspondence univoque entre les trajectoires de choc et les intégrales holomorphes dans le voisinage de* $r = 0$. — Arrivés à ce point il est naturel de se demander, si chacune de ces ∞^8 solutions correspond à un choc.

En d'autres mots nous pouvons nous proposer la question: Pourvu que le mouvement ait lieu le long d'une des trajectoires (S), y aura-t-il une valeur t_1 du temps, telle que $\lim\limits_{t=t_1} r = 0$? Voici la réponse.

Nous avons déjà observé, que, après avoir intégré le système (S) (ou même (1^{IV})), on peut avoir la loi du mouvement en intégrant l'équation:

$$\frac{dt}{d\rho_1} = 1 : \frac{\partial H_1}{\partial P_1},$$

dont le second membre doit être exprimé par les intégrales trouvées. Cette équation (en rappelant que $\frac{\partial H_1}{\partial P_1} = P_1 = -\frac{R}{r}$ et $d\rho_1 = 2rdr$) équivaut à:

$$dt = -\frac{2r^2}{R} dr.$$

D'après le comportement de R dans le domaine de $r = 0$, on tire que $-\frac{2r^2}{R}$ est une fonction intégrable dans un intervalle $(0, r)$ suffisamment petit. On pourra donc écrire:

$$t_1 - t = \int_0^r \frac{2r^2}{R} dr, \tag{28}$$

t_1 étant la valeur de t correspondente à $r = 0$. Puisque le second membre est fini, nous pouvons répondre affirmativement à la demande, que nous nous étions faite.

Les résultats, que nous avons obtenus, peuvent être résumés par le théorème:

Toutes et seulement les solutions du système (S), *qui sont holomorphes pour* $r = 0$, *correspondent aux trajectoires le long desquelles a lieu, au bout d'un temps fini, un choc entre les deux points* $P_0 P_1$.

IV. *Chocs passés et chocs futurs.* — Jusqu'ici nous n'avons jamais fait aucune distinction entre les chocs qui peuvent arriver et ceux qui ont eu déjà lieu. Ce dernier pas peut être fait en considérant l'équation (28).

Elle nous dit, que, puisque le facteur dr est toujours négatif, le signe de dt est le même que celui de R. Mais nous avons vu que:

$$(29) \quad R = -rP_1 = \pm \sqrt{\Big\{ 2(m_0 + m_1) + r^2 \mu_1 \Big[2\Big(\frac{m_0 m_2}{\rho_2} + \frac{m_1 m_2}{\Delta}\Big) - \mu_2 (p_2^2 + q_2^2 + r_2^2) \Big] - r^6 (\vartheta_1'^2 + \varphi_1'^2 \sin^2 \vartheta_1 \Big\}}$$

(v. § 4, n° 2), par conséquent le système (S) nous fournit des trajectoires correspondantes aux chocs futurs ou passés, selon que nous prenons le radical avec le signé + ou —.

§ 6. *Conditions de choc.*

I. *Déterminations de ces conditions.* — Pour accomplir la récherche, que nous avons entreprise nous nous proposons maintenant de caractériser les conditions de choc. C'est-à-dire que nous voulons chercher des équations auxquelles doivent satisfaire les valeurs initiales des variables, dont dépend le mouvement des trois points (ou, si l'on veut, le mouvement relatif de deux entre eux), pour qu'à partir de ces valeurs il y ait un choc au bout d'un temps fini.

Nous avons vu que, pour avoir toutes les trajectoires singulières, il faut remplacer par des valeurs arbitraires les constantes d'intégration, qui entrent dans les équations (20). On a de la sorte, que les relations cherchées s'obtiendront en éliminant les paramètres arbitraires entre les

équations susdites.[1] Il a été déjà montré, dans le paragraphe précédent, que cette opération est possible. Pour l'effectuer il suffit de se rappeler, que le second groupe des équations (22) a été obtenu par l'élimination des paramètres $\lambda_i^{(0)}$ entre les équations (21). Mais, comme celles-ci coïncident avec les (20), pourvu que l'on pose $u_1 = u_2 = 0$, on atteindra le résultat que l'on cherche, en posant $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ dans le deuxième groupe des (22). On trouve ainsi:

$$\lambda_j' - r\Lambda_j^{(1)}(r, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_8) = 0. \qquad (j=1,2) \tag{30}$$

Nous avons déjà remarqué que ces relations peuvent nous représenter les conditions de choc entre deux autres points de notre système, pourvu que la signification des lettres soit changée cycliquement.

En indiquant tout court par $u_1^{(1)}$, $u_2^{(1)}$ les premiers membres de (30), nous pouvons donc conclure que deux relations du type:

$$u_1^{(1)}u_1^{(2)}u_1^{(3)} = 0, \qquad u_2^{(1)}u_2^{(2)}u_2^{(3)} = 0$$

sont caractéristiques pour le choc entre deux quelconques de nos points. Si, au contraire, les conditions initiales vérifient l'une ou l'autre des inégalités:

$$u_1^{(1)}u_1^{(2)}u_1^{(3)} \neq 0, \qquad u_2^{(1)}u_2^{(2)}u_2^{(3)} \neq 0,$$

nous pourrons être surs que le mouvement se poursuivra régulièrement.[2]

---

[1] Nous pouvons même dire, en empoyant un language géométrique, que les équations (20) définissent dans l'espace à dix dimentions un hyperspace à huit dimentions, dont les équations s'obtiennent en éliminant les paramètres $\lambda_i^{(0)}$.

[2] Je ne crois pas inutile à ce propos de rappeler que nous sommes arrivés aux conditions $u_1^{(1)} = 0$, $u_2^{(1)} = 0$ (qui caractérisent un choc P_0P_1) en admettant: I° $\lim_{t=t_1} P_0P_1 = 0$, II° dans le voisinage de t_1 la limite inférieure de P_0P_2 ne soit pas nulle, III° ϑ_1 et φ_1 tendent vers des valeurs déterminées et finies.

Si les deux conditions trouvées sont verifiées par les conditions initiales il y aura, au bout du temps t_1, un choc P_0P_1 qui vérifiera les trois hypothèses. S'il n'est pas en même temps $u_1^{(1)} = 0$, $u_2^{(1)} = 0$, nous pouvons affirmer, que l'une ou l'autre des hypothèses faites n'aura pas lieu. Nous pouvons évidemment admettre que la II° soit toujours vraie, car nous étudions seulement les chocs de deux corps, mais non ceux de tous les trois. Si la I° n'est pas satisfaite, le mouvement, d'après le théorème de M. Painlevé n'a pas de singularités. Mais il n'est pas exclu que seulement la III° ne soit pas vérifiée. Ce choc exceptionel, qui n'a aucun point de repère dans l'intuition, n'est pas compris dans les conditions $u_1^{(1)} = 0$, $u_2^{(1)} = 0$, et il échappe effectivement à notre discussion.

Voilà ce que nous voulions mettre en évidence.

Il ne faut pas cependant se tromper sur la portée de ce résultat. Nous ne pouvons pas assurer la régularité indéfinie du mouvement, mais seulement la régularité jusqu'à une valeur t' du temps pas trop éloignée de l'instant initial, car la biunivocité entre les trajectoires de choc et les solutions holomorphes du système (S) a été démontrée seulement pour r suffisamment petit. Si les conditions du mouvement pour $t = t'$ sont telles que les inégalités précédentes soient encore vérifiées, le mouvement sera encore régulier pendant un autre intervalle (t', t''); et ainsi de suite.

II. *Comportement analytique des deux conditions trouvées au voisinage d'un choc.* — Ayant égard aux équations différentielles les premiers membres des égalités (30) peuvent se développer en séries de puissances de r. Nous verrons tout à l'heure que les coefficients de ces séries pourront être déterminés de proche en proche par de simples opérations en termes finis et différentiations.

Il faudra que nous établissions à ce but des équations différentielles, auxquelles doivent satisfaire les fonctions $\bar{\varLambda}_j^{(1)}$. Les relations (30) sont valables pour toute valeur de r, tant que l'on reste sur une trajectoire singulière. Si nous dérivons ces équations par rapport à r et nous remplaçons les dérivées de λ_i, λ'_j par leurs expressions (S), nous parviendrons à des relations, qui seront valables identiquement, pourvu que nous ayons égard aux équations (30) mêmes. Nous aurons donc, en remplaçant en outre le symbole $\bar{\varLambda}_j^{(1)}$ par F_j:

$$\frac{d\lambda'_j}{dr} - \frac{\partial(rF_j)}{\partial r} - r\sum_{1}^{8}{}_i \frac{\partial F_j}{\partial \lambda_i}\frac{d\lambda_i}{dr} = 0, \qquad (j=1,2)$$

ou même, d'après (S):

$$-4\frac{\lambda'_j}{r} + 2r^2\frac{\beta_j}{R} - r\frac{\partial F_j}{\partial r} - F_j + \frac{2r^2}{R}\sum{}_i \frac{\partial F_j}{\partial \lambda_i}\alpha_i = 0 \qquad (j=1,2)$$

et enfin, en vertu de (30):

$$(31) \qquad 5F_j + r\frac{\partial F_j}{\partial r} = \frac{2r^2}{R}\left(\beta_j + \sum_{1}^{8}{}_i \frac{\partial F_j}{\partial \lambda_i}\alpha_i\right). \qquad (j=1,2)$$

Substituons maintenant à la place des fonctions λ'_j (qui entrent dans les expressions de α_i, β_j, R) leurs valeurs rF_j. Les seconds membres de (31) pourront alors être envisagés comme des fonctions des produits $rF_j, r\frac{\partial F_j}{\partial \lambda_i}$. On tire de la sorte deux équations simultanées aux dérivées partielles, qui sont à même de nous donner les coefficients des séries que l'on cherche.

Posons à ce but

$$F_j = \sum_{0}^{\infty}{}_m f_j^{(m)} r^m. \tag{32} \qquad (j=1,2)$$

Les équations (31) s'écriront donc:

$$\sum_{0}^{\infty}{}_m (5+m) f_j^{(m)} r^m = \Omega_j\left(r, \lambda_i; \sum_{0}^{\infty}{}_m f_j^{(m)} r^{m+1}; \sum_{0}^{\infty}{}_m \frac{\partial f_j^{(m)}}{\partial \lambda_i} r^{m+1}\right). \qquad (j=1,2)$$

Dérivons maintenant les deux membres n fois par rapport a r et posons ensuite $r = 0$. Il est aisé de voir, que dans les premiers membres il nous reste seulement les deux coefficients $f_1^{(n)}, f_2^{(n)}$ multipliés par $(5+n)\underline{|n}$, tandis que dans les seconds membres nous aurons des fonctions des coefficients $f_j^{(0)}, \ldots, f_j^{(n-1)}$ et de leurs dérivées par rapport aux λ_i.

Une couple quelconque de coefficients des mêmes puissances de r dans les séries (32) pourra donc être déterminée lorsque les coefficients des puissances inférieures soient connus. Les deux premiers $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}$ se tirent des équations (31) (combinées avec les (32)) en posant $r = 0$, par conséquent tous les autres s'obtiendront de proche en proche.

III. *Développement approximatif suivant les puissances de* r. — Maintenant que nous avons démontré la possibilité d'effectuer ces développements, nous donnerons, pour les réaliser, une méthode, qui est essentiellement différente de celle, que nous avons indiquée tout à l'heure, mais qui est bien plus commode. Nous développerons les deux membres de (31) en séries de puissances et nous égalerons ensuite les coefficients des mêmes puissances. Il nous convient d'abord de remarquer que les seconds membres sont multipliés par le facteur r^2 et que par conséquent les coefficients $f_1^{(0)}, f_2^{(0)}, f_1^{(1)}, f_2^{(1)}$ des F_j seront nuls. Il sera donc permis de partir des développements:

$$F_j = r^2 \sum_{0}^{\infty}{}_m \omega_j^{(m)} r^m. \tag{33} \qquad (j=1,2)$$

Les premiers membres des égalités (31) deviennent:

$$5F_j + r\frac{\partial F_j}{\partial r} = 5r^2 \sum_{0}^{\infty}{}_m \omega_j^{(m)} r^m + r\left\{ 2r \sum_{0}^{\infty}{}_m \omega_j^{(m)} r^m + r^2 \sum_{0}^{\infty}{}_m m\omega_j^{(m)} r^{m-1} \right\}$$

$$= r^2 \sum_{0}^{\infty}{}_m (7+m)\omega_j^{(m)} r^m,$$

et les égalités mêmes pourront être remplacées par les:

$$(34)\qquad \sum_0^\infty{}_m (7+m)\,\omega_j^{(m)} r^m = \frac{2}{R}\left\{\beta_j + r^2 \sum_1^8{}_i \sum_0^\infty{}_m \frac{\partial \omega_j^{(m)}}{\partial \lambda_i}\,\alpha_i r^m\right\}. \qquad (j=1,2)$$

Il faut maintenant que nous nous procurions les éléments, qui nous sont nécessaires pour les développements des seconds membres.

En vertu des positions (8) et (15) nous pouvons écrire:

$$\Delta^2 = r^4 - 2r^2\nabla_1 + \rho_2^2 = \rho_2^2\left\{1 - 2\frac{r^2}{\rho_2^2}\nabla_1 + \left(\frac{r^2}{\rho_2}\right)^2\right\}.$$

Par conséquent:

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\rho_2}\left\{1 - \frac{r^2}{\rho_2^2}(2\nabla_1 - r^2)\right\}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\rho_2}\left\{1 + r^2\frac{\nabla_1}{\rho_2^2} + r^4\frac{3\nabla_1^2 - \rho_2^2}{2\rho_2^4} + \mathbf{6}\right\}.$$

$$\frac{1}{\Delta^3} = \frac{1}{\rho_2^3}\left\{1 + r^2\frac{3\nabla_1}{\rho_2^2} + r^4\frac{3(5\nabla^2 - \rho_2^2)}{2\rho_2^4} + \mathbf{6}\right\}.$$

Le symbole **n** remplace l'ensemble des termes de $n^{\text{ième}}$ ordre par rapport à r.

L'expression (29) de R peut s'écrire aussi:

$$R = \pm\left\{2(m_0+m_1) + r^2\mu_1\left[2\left(h + \frac{m_0 m_2}{\rho_2} + \frac{m_1 m_2}{\Delta}\right) - \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right]\right.$$
$$\left. - r^6(\vartheta_1'^2 + \varphi_1'^2\sin^2\vartheta_1)\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Par conséquent, ayant égard aux relations (30) et au développement de $\frac{1}{\Delta}$, nous aurons:

$$R = \pm\left\{2(m_0+m_1) + 2\mu_1 r^2\left[h + \frac{(m_0+m_1)m_2}{\rho_2} - \mu_2(p_2^2+q_2^2+r_2^2)\right] + \mathbf{4}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

ou même:

$$R = \pm\sqrt{2(m_0+m_1)}\left\{1 + \frac{r^2}{2m_0m_1}\left[h + \frac{(m_0+m_1)m_2}{\rho_2} - \mu_2(p_2^2+q_2^2+r_2^2)\right] + \mathbf{4}\right\}.$$

On tire par suite:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\pm\sqrt{2(m_0+m_1)}}\left\{1 - \frac{r^2}{2m_0m_1}\left[h + \frac{(m_0+m_1)m_2}{\rho_2} - \mu_2(p_2^2+q_2^2+r_2^2)\right] + \mathbf{4}\right\}.$$

D'après les positions (19) nous avons:

$$\beta_2 = -r^2 F_2^2 \frac{\sin 2\vartheta_1}{2} - m_2\left(\frac{3\nabla_1}{\rho_2^2} + r^2\frac{3(5\nabla^2 - \rho_2^2)}{2\rho_2^4} + \mathbf{4}\right)\frac{\partial \nabla_1}{\partial \vartheta_1},$$

ou bien, en vertu de (33):

$$\beta_1 = -\frac{3m_2}{2\rho_2^2}\frac{\partial \nabla_1^2}{\partial \vartheta_1} - r^2\frac{m_2}{2\rho_2^4}\frac{\partial}{\partial \vartheta_1}(5\nabla_1^3 - 3\nabla_1\rho_2^2) + \mathbf{4}.$$

D'une manière analogue:

$$\beta_2 = \frac{1}{\sin^2\vartheta_1}\left\{-\frac{3m_2}{2\rho_2^2}\frac{\partial \nabla_1^2}{\partial \varphi_1} - r^2\frac{m_2}{2\rho_2^4}\frac{\partial}{\partial \varphi}(5\nabla_1^3 - 3\nabla_1\rho_2^2) + \mathbf{4}\right\},$$

$$\alpha_1 = r^2 F_1 = \mathbf{4},$$

$$\alpha_2 = r^2 F_2 = \mathbf{4},$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{m_0\mu_1}\left\{\mp\sqrt{2(m_0 + m_1)}\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + rm_0\mu_1\mu_2 p_2\right.$$
$$\left.\mp r^2\frac{\sqrt{2(m_0 + m_1)}}{2m_0 m_1}\left[h + \frac{(m_0 + m_1)m_2}{\rho_2} - \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right]\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + \mathbf{4}\right\},$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{m_0\mu_1}\left\{\mp\sqrt{2(m_0 + m_1)}\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + rm_0\mu_1\mu_2 q_2\right.$$
$$\left.\mp r^2\frac{\sqrt{2(m_0 + m_1)}}{2m_0 m_1}\left[h + \frac{(m_0 + m_1)m_2}{\rho_2} - \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right]\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + \mathbf{4}\right\},$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{m_0\mu_1}\left\{\mp\sqrt{2(m_0 + m_1)}\cos\vartheta_1 + rm_0\mu_1\mu_2 r_2\right.$$
$$\left.\mp r^2\frac{\sqrt{2(m_0 + m_1)}}{2m_0 m_1}\left[h + \frac{(m_0 + m_1)m_2}{\rho_2} + \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right]\cos\vartheta_1 + \mathbf{4}\right\},$$

$$\alpha_6 = \frac{r}{\rho_2^3}\left\{(m_0 + m_1)m_2 x_2 - r^2 m_1 m_2\left(\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 - 3x_2\frac{\nabla_1}{\rho_2^2}\right) + \mathbf{4}\right\},$$

$$\alpha_7 = \frac{r}{\rho_2^3}\left\{(m_0 + m_1)m_2 y_2 - r^2 m_1 m_2\left(\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 - 3y_2\frac{\nabla_1}{\rho_2^2}\right) + \mathbf{4}\right\},$$

$$\alpha_8 = \frac{r}{\rho_2^3}\left\{(m_0 + m_1)m_2 z_2 - r^2 m_1 m_2\left(\cos\vartheta_1 - 3z_2\frac{\nabla_1}{\rho_2^2}\right) + \mathbf{4}\right\}.$$

D'après les positions (34), en faisant $j = 1$ et en substituant les développements trouvés, nous avons alors:

$$\sum_0^\infty{}_m (7 + m)\omega_1^{(m)} r^m =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2}{m_0 + m_1}}(1 - r^2 A + 4)\Bigg[\left\{-\frac{3m_2}{2\rho_2^3}\frac{\partial \nabla_1^2}{\partial \vartheta_1} - r^2\frac{m_2}{2\rho_2^4}\frac{\partial}{\partial \vartheta_1}(5\nabla_1^3 - 3\nabla_1\rho_2^2) + 4\right\}$$

$$+ \frac{r^2}{m_0\mu_1}\Bigg\{\left(\sum_0^\infty{}_m \frac{\partial \omega_1^{(m)}}{\partial x_2} r^m\right)\Big(\mp\sqrt{2(m_0 + m_1)}\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + rm_0\mu_1\mu_2 p_2$$

$$\mp r^2\sqrt{2(m_0 + m_1)}A\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + 4\Big)$$

$$+ \left(\sum_0^\infty{}_m \frac{\partial \omega_1^{(m)}}{\partial y_2} r^m\right)\Big(\mp\sqrt{2(m_0 + m_1)}\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + rm_0\mu_1\mu_2 q_2$$

$$\mp r^2\sqrt{2(m_0 + m_1)}A\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + 4\Big)$$

$$+ \left(\sum_0^\infty{}_m \frac{\partial \omega_1^{(m)}}{\partial z_2} r^m\right)\Big(\mp\sqrt{2(m_0 + m_1)}\cos\vartheta_1 + rm_0\mu_1\mu_2 r_2$$

$$\mp r^2\sqrt{2(m_0 + m_1)}A\cos\vartheta_1 + 4\Big)\Bigg\}$$

$$+ \frac{r^3}{\rho_2^3}\Bigg\{\left(\sum_0^\infty{}_m \frac{\partial \omega_1^{(m)}}{\partial p_2} r^m\right)\Big((m_0 + m_1)m_2 x_2$$

$$- r^2 m_1 m_2\left(\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 - 3x_2\frac{\nabla_1}{\rho_2^2}\right) + 4\Big)$$

$$+ \left(\sum_0^\infty{}_m \frac{\partial \omega_1^{(m)}}{\partial q_2} r^m\right)\Big((m_0 + m_1)m_2 y_2$$

$$- r^2 m_1 m_2\left(\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 - 3y_2\frac{\nabla_1}{\rho_2^2}\right) + 4\Big)$$

$$+ \left(\sum_0^\infty{}_m \frac{\partial \omega_1^{(m)}}{\partial r_2} r^m\right)\Big((m_0 + m_1)m_2 z_2$$

$$- r^2 m_1 m_2\left(\cos\vartheta_1 - 3z_2\frac{\nabla_1}{\rho_2^2}\right) + 4\Big)\Bigg\}\Bigg],$$

où nous avons posé:

$$A = \frac{1}{2m_0 m_1}\left(h + \frac{(m_0 + m_1)m_2}{\rho_2} - \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right).$$

En ordonnant selon les puissances croissantes de r, il viendra:

$$\sum_0^\infty {}_m (7 + m)\omega_1^{(m)} r^m =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{2}{m_0 + m_1}}\Bigg[-\frac{3m_2}{2\rho_2^2}\frac{\partial \nabla_1^2}{\partial \vartheta_1} + r^2\left\{\frac{3m_2}{2\rho_2^2}\frac{\partial \nabla_1^2}{\partial \vartheta_1}A - \frac{m_2}{2\rho_2^4}\frac{\partial}{\partial \vartheta_1}(5\nabla_1^3 - 3\nabla_1\rho_2^2)\right.$$

$$\left.\mp\frac{\sqrt{2(m_0 + m_1)}}{m_0\mu_1}\left(\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial x_2}\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + \frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial y_2}\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + \frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial z_2}\cos\vartheta_1\right)\right\}$$

$$+ r^3\left\{\mu_2\left(p_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial x_2} + q_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial y_2} + r_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial z_2}\right)\right.$$

$$+ \frac{(m_0 + m_1)m_2}{\rho_2^3}\left(x_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial p_2} + y_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial q_2} + z_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial r_2}\right)$$

$$\left.\mp\frac{\sqrt{2(m_0 + m_1)}}{m_0\mu_1}\left(\frac{\partial \omega_1^{(1)}}{\partial x_2}\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + \frac{\partial \omega_1^{(1)}}{\partial y_2}\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + \frac{\partial \omega_1^{(1)}}{\partial z_2}\cos\vartheta_1\right)\right\} + 4\Bigg].$$

En égalant les coefficients des mêmes puissances de r, nous parviendrons aux égalités:

$$\omega_1^{(0)} = \pm\sqrt{\frac{2}{m_0 + m_1}}\frac{3m_2}{14\rho_2^2}\frac{\partial \nabla_1^2}{\partial \vartheta_1},$$

$$\omega_1^{(1)} = 0,$$

$$\omega_1^{(2)} = \pm\frac{1}{9}\sqrt{\frac{2}{m_0 + m_1}}\left\{\frac{3m_2}{4m_0 m_1\rho_2^2}\left(h + \frac{(m_0 + m_1)m_2}{\rho_2} - \mu_2(p_2^2 + q_2^2 + r_2^2)\right)\frac{\partial \nabla_1^2}{\partial \vartheta_1}\right.$$

$$- \frac{m_2}{2\rho_2^4}\frac{\partial}{\partial \vartheta_1}(5\nabla_1^3 - 3\nabla_1\rho_2)$$

$$\left.\mp\frac{\sqrt{2(m_0 + m_1)}}{m_0\mu_1}\left(\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial x_2}\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 + \frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial y_2}\sin\vartheta_1\sin\varphi_1 + \frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial z_2}\cos\vartheta_1\right)\right\},$$

$$\omega_1^{(3)} = \pm\frac{1}{10}\sqrt{\frac{2}{m_0 + m_1}}\left\{\mu_2\left(p_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial x_2} + q_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial y_2} + r_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial z_2}\right)\right.$$

$$\left.+ \frac{(m_0 + m_1)m_2}{\rho_2^3}\left(x_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial p_2} + y_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial q_2} + z_2\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial r_2}\right)\right\}.$$

Si nous remarquons, en vertu des positions (8), que:

$$\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial x_2}\sin\vartheta_1\cos\varphi_1+\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial y_2}\sin\vartheta_1\sin\varphi_1+\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial z_2}\cos\vartheta_1=$$

$$=\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial x_2}\frac{\partial \nabla_1}{\partial x_2}+\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial y_2}\frac{\partial \nabla_1}{\partial y_2}+\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial z_2}\frac{\partial \nabla_1}{\partial z_2}$$

$$=\mp\frac{3m_2}{14}\sqrt{\frac{2}{m_0+m_1}}\overset{2}{\nabla}\left\{\frac{1}{\rho_2^2}\frac{\partial \nabla_1^2}{\partial \vartheta_1},\nabla_1\right\},$$

$$\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial x_2}p_2+\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial y_2}q_2+\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial z_2}r_2=\pm\frac{3m_2}{14}\sqrt{\frac{2}{m_0+m_1}}\frac{\partial}{\partial \vartheta_1}\overset{2}{\nabla}\left(V_2,\frac{\nabla_1^2}{\rho_2^2}\right),[1]$$

$$\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial p_2}x_2+\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial q_2}y_2+\frac{\partial \omega_1^{(0)}}{\partial r_2}z_2=0,$$

où:

$$V_2=p_2x_2+q_2y_2+r_2z_2,$$

nous aurons enfin:

$$\omega_1^{(0)}=\mp\frac{3m_2}{14\rho_2^2}\sqrt{\frac{2}{m_0+m_1}}\frac{\partial \nabla_1^2}{\partial \vartheta_1},$$

$$\omega_1^{(1)}=0,$$

$$\omega_1^{(2)}=\pm\frac{m_2}{9}\sqrt{\frac{2}{m_0+m_1}}\left[\frac{3m_2}{7(m_0+m_1)}\overset{2}{\nabla}\left\{\frac{1}{\rho_2^2}\frac{\partial \nabla_1^2}{\partial \vartheta_1},\nabla_1\right\}\right.$$

$$-\frac{\partial}{\partial \vartheta_1}\left\{\frac{3\nabla_1^2}{4m_0m_1\rho_2^2}\left(h+\frac{(m_0+m_1)m_2}{\rho_2}\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{m_0+m_1+m_2}{(m_0+m_1)m_2}(p_2^2+q_2^2+r_2^2)\right)+\frac{3}{2}\frac{\nabla_1}{\rho_2^3}-\frac{5}{2}\frac{\nabla_1^3}{\rho_2^4}\right\}\right],$$

$$\omega_1^{(3)}=-\frac{3(m_0+m_1+m_2)}{70(m_0+m_1)^2}\frac{\partial}{\partial \vartheta_1}\overset{2}{\nabla}\left(V_2,\frac{\nabla_1^2}{\rho_2^2}\right).$$

---

[1] Nous avons posé évidemment:

$$\overset{2}{\nabla}(f,\varphi)=\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}+\frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}+\frac{\partial f}{\partial z_2}\frac{\partial \varphi}{\partial z_2},$$

D'une manière parfaitement identique on pourrait déduire:

$$\omega_2^{(0)} = \mp \frac{3m_2}{14\rho_2^2} \sqrt{\frac{2}{m_0 + m_1}} \frac{\partial \nabla_1^2}{\partial \varphi_1},$$

$$\omega_2^{(1)} = 0,$$

$$\begin{aligned} \omega_2^{(2)} = \pm \frac{m_2}{9 \sin^2 \vartheta_1} \sqrt{\frac{2}{m_0 + m_1}} \Bigg[& \frac{3m_1}{7(m_0 + m_1)} \overset{2}{\nabla} \left\{ \frac{1}{\rho_2^2} \frac{\partial \nabla_1^2}{\partial \varphi_1}, \nabla_1 \right\} \\ & - \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \left\{ \frac{3\nabla_1^2}{4 m_0 m_1 \rho_2^2} \left(h + \frac{(m_0 + m_1) m_2}{\rho_2} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{m_0 + m_1 + m_2}{(m_0 + m_1) m_2} (p_2^2 + q_2^2 + r_2^2) \right) + \frac{3}{2} \frac{\nabla_1}{\rho_2^3} - \frac{5 \nabla_1^3}{2\rho_2^4} \right\} \Bigg], \end{aligned}$$

$$\omega_2^{(3)} = \mp \frac{3(m_0 + m_1 + m_2)}{70(m_0 + m_1)^2 \sin^2 \vartheta_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_1} \overset{2}{\nabla} \left(V_2, \frac{\nabla_1^2}{\rho_2^2} \right).$$

Ayant égard à ces formules nous pouvons conclure que, *lorsque* P_1 *est suffisamment près de* P_0, les deux équations:

$$(35) \qquad \begin{cases} \vartheta_1' - r^3(\omega_1^{(0)} + \omega_1^{(2)} r^2 + \omega_1^{(3)} r^3) = 0, \\ \varphi_1' - r^3(\omega_2^{(0)} + \omega_2^{(2)} r^2 + \omega_2^{(2)} r^3) = 0 \end{cases}$$

nous fournissent les deux conditions cherchées entre les valeurs initiales des variables, dont dépend le mouvement des trois points. Ces équations nous permettrons de décider, avec une certitude suffisante, sur la régularité du mouvement avant ou après l'instant initial.

Les équations (30) sont valables, et leurs premiers membres peuvent être regardés comme des fonctions analytiques de r, pourvu que celle-ci soit assez petite.

En effet nous ne savons rien par rapport à la grandeur du rayon de convergence des séries (32), car nous avons démontré seulement, qu'il n'est pas nul. *A fortiori* nous ne pourrons rien conclure, si nous remplaçons les conditions (30) par les (35) (qui équivalent à celles-là seulement par approximation) si nous ne partons pas d'une position de P_1 assez près de P_0.

Rome, mai 1904.

TABLE DES MATIÈRES.

		Pag.
Préface		49

§ 1. Équations du mouvement.

I.	Mouvement des trois corps P_0, P_1, P_2 référé à des axes fixes	51
II.	Transformation de Poincaré	51
III.	Remplacement des composantes de la vitesse absolue de P_1 par les composantes de sa vitesse relative	53
IV.	Forme semi-canonique polaire pour les équations du premier groupe	54

§ 2. Quelques conséquences que l'on tire des équations du mouvement dans l'hypothèse: $\lim_{t=t_1} P_0P_1 = 0$.

I.	Comportement de la vitesse absolue de P_2	57
II.	Comportement de la vitesse relative de P_1	58

§ 3. Changement de la variable indépendante.

I.	Remplacement de t par $\rho_1 = P_0P_1$	63
II.	Remarques générales à l'égard des équations obtenues	65

§ 4. Forme définitive des équations.

I.	Nouvelle transformation de variables	65
II.	Comportement des seconds membres des équations (S) au voisinage d'une position de choc	70

§ 5. Intégrales qui correspondent aux trajectoires singulières.

I.	Théorème d'existence	71
II.	Toutes les solutions du système (S) sont holomorphes	73
III.	Correspondence univoque entre les trajectoires de choc et les intégrales holomorphes dans le voisinage de $r = 0$	81
IV.	Chocs passés et chocs futurs	82

§ 6. Conditions de choc.

I.	Détermination de ces conditions	82
II.	Comportement analytique des deux conditions trouvées au voisinage d'un choc	84
III.	Développement approximatif suivant les puissances de r	85

EINE AUF UNENDLICHE PRODUKTE SICH BEZIEHENDE FEHLERABSCHÄTZUNGSREGEL

VON

W. FR. MEYER
in KÖNIGSBERG i/P.

(Auszug eines Briefes an den Herausgeber.)

Ich gestatte mir, Ihnen eine allgemeinere, sich auf unendliche Produkte beziehende Fehlerabschätzungsregel mitzuteilen.

Ich schicke einen einfachen Hülfssatz über natürliche Logarithmen voraus. Sei g eine reelle positive Grösse, und es sei bekannt, dass $|lg|$ unterhalb der positiven Grösse γ liege, so soll der Unterschied zwischen g und 1 nach einer für positive und negative Werte von $g-1$ gemeinsamen Regel abgeschätzt werden.

Ist erstens $g > 1$, so hat man nach Voraussetzung:

$$(1) \qquad lg < \gamma, \qquad g < e^\gamma,$$

also:

$$(2) \qquad g - 1 < e^\gamma - 1,$$

oder, wenn man e^γ in die Exponentialreihe entwickelt und hinter dem zweiten Gliede abbricht — so dass $\gamma < 2$ vorauszusetzen ist —

$$(3) \qquad g - 1 < \frac{\gamma}{1 - \frac{\gamma}{2}}.$$

Ist zweitens $g < 1$, so wird nach Voraussetzung:

$$(1') \qquad |lg| = l\frac{1}{g} < \gamma, \qquad \frac{1}{g} < e^\gamma, \qquad \frac{1}{g} - 1 < e^\gamma - 1, \qquad 1 - g < g(e^\gamma - 1),$$

also, da $g < 1$, a fortiori:

$$(2') \qquad 1 - g < e^\gamma - 1,$$

und, um so mehr, wie oben:

$$(3') \qquad 1 - g < \frac{\gamma}{1 - \frac{\gamma}{2}}.$$

Demnach liefert die Zusammenfassung von (2), (2'); (3), (3') den fraglichen Hülfssatz:

»*Ist g reell und positiv,* $|lg| < \gamma$, $0 < \gamma < 2$, *so ist, gleichgültig ob* $g \gtrless 1$:

$$\text{(I)} \qquad |g - 1| < e^\gamma - 1 < \frac{\gamma}{1 - \frac{\gamma}{2}}.«$$

Sei jetzt ein unendliches konvergentes Produkt vorgelegt:

$$(4) \qquad \Pi = (1 + v_0)(1 + v_1)\dots(1 + v_\nu)\dots(1 + v_{\nu+p-1})\dots,$$

wo die v beliebig positiv und negativ seien; $|v_n|$ sei mit u_n bezeichnet, und von $n \geqq \nu$ an sei $u_n < 1$.

Man betrachte zuvörderst den einfacheren Fall, wo Π *absolut* (und damit unbedingt) konvergiert, wo also die Reihe der u konvergiert.

Es soll der »*Fehler*« des Produktes Π abgeschätzt werden, wenn man hinter dem ν^{ten} Faktor $1 + v_{\nu-1}$ abbricht, d. i. die Differenz $P_{\nu,p} - 1$, wo $P_{\nu,p}$ das *Restprodukt* bedeutet:

$$(5) \qquad P_{\nu,p} = (1 + v_\nu)(1 + v_{\nu+1})\dots(1 + v_{\nu+p-1}).$$

Nach dem Mittelwertsatze wird:

$$l(1 + v_n) = \frac{v_n}{1 + \vartheta_n v_n} \qquad (0 < \vartheta_n < 1).$$

Ist v_n positiv, so hat man $l(1 + v_n) < v_n (= u_n)$. Ist v_n negativ $= -u_n$, so hat man $|l(1 + v_n)| < \frac{u_n}{1 - u_n}$. Mithin ist in beiden Fällen:

$$(6) \qquad |l(1 + v_n)| < \frac{u_n}{1 - u_n} \qquad (n \geqq \nu),$$

oder, da mit Rücksicht auf $\lim u_n = 0$ alle u_n $(n \geqq \nu)$ unterhalb einer gewissen Grenze u liegen:

$$(7) \qquad |l(1 + v_n)| < \frac{u_n}{1 - u},$$

folglich:

$$(8) \qquad |lP_{\nu,p}| < \frac{1}{1 - u}(u_\nu + u_{\nu+1} + \dots + u_{\nu+p-1}).$$

Die Klammer rechterhand ist der Rest $R_{\nu,p}$ der u-Reihe; da die Reihe der u konvergiert, so bleibt auch $R_{\nu,p}$ unter einer gewissen, von p unabhängigen Grenze R_ν (die mit wachsendem ν gegen Null konvergiert). Damit geht (8) über in:

$$(9) \qquad |lP_{\nu,p}| < \frac{1}{1 - u} R_\nu.$$

Wendet man hierauf den Hülfssatz (I) *an, so hat man für die gesuchte Fehlerabschätzung:*

$$(\mathrm{II}^a) \qquad |P_{\nu,p} - 1| < e^{\frac{1}{1-u}R_\nu} - 1 < \frac{\frac{1}{1-u} R_\nu}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-u} R_\nu}.$$

Nunmehr gehe man zu dem Falle über, wo das Produkt Π (gegen einen endlichen, von Null verschiedenen Grenzwert) *bedingt konvergiert*, wo also auch die Reihe der v nur bedingt, und zugleich die Reihe der v^2 konvergiert. Der einmal erweiterte Mittelwertsatz liefert:

$$l(1 + v_n) = v_n - \frac{v_n^2}{2} \cdot \frac{1}{(1 + \vartheta_n v_n)^2} \qquad (0 < \vartheta_n < 1),$$

somit:

$$(10) \qquad lP_{\nu,p} = R_{\nu,p} - \frac{1}{2} \sum_{n=\nu}^{n=\nu+p-1} \frac{v_n^2}{(1 + \vartheta_n v_n)^2} \qquad (0 < \vartheta_n < 1),$$

wo

$$R_{\nu,p} = v_\nu + v_{\nu+1} + \dots + v_{\nu+p-1}$$

der Rest der v-Reihe bedeutet.

Wegen $\lim\limits_{n=\infty} R_{n,p} = 0$ lässt sich bei gegebenem $n = \nu$ eine feste obere (positive) Grenze ρ_ν angeben, sodass $|R_{\nu,p}|$ für jedes p unterhalb ρ_ν bleibt.

Mit Rücksicht auf $\lim v_n = 0$ bleibt wiederum von $|v_\nu| = u_\nu$ ab $u_n < u$. Damit geht aus (10) die Ungleichung hervor:

$$(11) \qquad |lP_{\nu,p}| < \rho_\nu + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-u)^2}\sum_{n=\nu}^{n=\nu+p-1} v_n^2.$$

Da aber Σv^2 konvergiert, so bleibt auch $\sum_{n=\nu}^{n=\nu+p-1} v_n^2$ bei gegebenem ν und beliebigem p unterhalb einer festen oberen Grenze V_ν. *Mit Rücksicht auf* (I) *liefert demnach* (11) *die gesuchte Fehlerabschätzung:*

$$(\mathrm{II^b}) \qquad |P_{\nu,p} - 1| < e^{\rho_\nu + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1-u)^2}V_\nu} - 1 < \frac{\rho_\nu + \frac{1}{2}\frac{1}{(1-u)^2}V_\nu}{1 - \frac{1}{2}\rho_\nu - \frac{1}{4}\frac{1}{(1-u)^2}V_\nu}.$$

Auf Grund der Formeln (II^a), (II^b) ist die Fehlerabschätzung für unendliche konvergente Produkte erledigt.

Die in meinem letzten Schreiben mitgeteilten Fehlerabschätzungsregeln für unendliche Produkte lassen sich auf das komplexe Gebiet übertragen. Was zuvörderst den Hülfssatz (I) für den natürlichen Logarithmus angeht, so sei jetzt P eine komplexe Grösse $= 1 + P_1$, $|P_1| < 1$, und

$$|lP| < \gamma \qquad (\gamma \text{ reell}, > 0).$$

Dann wird:

$$e^{|lP|} - 1 < e^\gamma - 1 < \frac{\gamma}{1 - \frac{\gamma}{2}},$$

$$e^{|lP|} - 1 = |lP| + \frac{1}{2}|lP|^2 + \dots,$$

$$P - 1 = e^{lP} - 1 = lP + \frac{1}{2}(lP)^2 + \dots,$$

somit:

$$|P - 1| < e^{|lP|} - 1 < e^\gamma - 1.$$

Der auf komplexe Grössen ausgedehnte Hülfssatz (I) lautet demnach:

»Bedeutet P eine komplexe Grösse $= 1 + P_1$, $|P_1| < 1$, so folgt aus der Voraussetzung $|lP| < \gamma$, dass:

$$
|P - 1| < e^{\gamma} - 1 < \frac{\gamma}{1 - \frac{\gamma}{2}}. \text{»} \tag{I'}
$$

Es sei jetzt das unendliche Produkt Π vorgelegt:

$$
\Pi = (1 + v_0)(1 + v_1)\ldots(1 + v_\nu)\ldots(1 + v_{\nu+p-1})\ldots, \tag{1}
$$

wo die v_i komplexe Grössen seien, deren absolute Beträge $u_i < 1$ vorausgesetzt werden.

Es werde gleich der allgemeine Fall in Betracht gezogen (cf. A. PRINGSHEIM, Math. Annalen, XXII, (1883), p. 480) dass die Reihen der v, $v^2, \ldots, v^{n-1}$ $(n \geq 1)$ *bedingt* konvergieren, dagegen die Reihe der v^n *unbedingt*.

Bedient man sich also der Bezeichnungen:

$$
\begin{cases} R^{(k)}_{\nu,p} = v^k_\nu + v^k_{\nu+1} + \ldots + v^k_{\nu+p-1}, & (k=1,2,\ldots,n-1) \\ R_{\nu,p} = u^n_\nu + u^n_{\nu+1} + \ldots + u^n_{\nu+p-1}, \end{cases} \tag{1}
$$

so wird ν so gross vorausgesetzt, dass die absoluten Werte der $R^{(k)}_{\nu,p}$ nebst $R_{\nu,p}$ bereits unter gewisse Grenzen $\rho^{(k)}_\nu$, V_ν heruntergedrückt seien, die mit wachsendem ν beliebig klein werden:

$$
|R^{(k)}_{\nu,p}| < \rho^{(k)}_\nu, \qquad R_{\nu,p} < V_\nu. \tag{3}
$$

Von u_ν an seien alle $u_i \leqq u$, wo auch u mit wachsendem ν beliebig klein wird.

Dann gilt:

$$
l(1 + v_i) = v_i - \frac{v_i^2}{2} + \frac{v_i^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{v_i^{n-1}}{n-1} + S^{(n)}_i, \tag{4}
$$

und damit für das Restprodukt $P_{\nu,p}$:

$$
lP_{\nu,p} = \sum_{i=\nu}^{i=\nu+p-1} l(1 + v_i) = R^{(1)}_{\nu,p} - \frac{1}{2} R^{(2)}_{\nu,p} + \frac{1}{3} R^{(3)}_{\nu,p} - \ldots \tag{5}
$$

$$
+ (-1)^n \frac{R^{(n-1)}_{\nu,p}}{n} + \sum_{i=\nu}^{i=\nu+p-1} S^{(\nu)}_i.
$$

Nach dem CAUCHY'schen Konvergenzkriterium für die logarithmische Reihe ist aber:

$$(6) \qquad \left|\sum_{i=\nu}^{i=\nu+p-1} S_i^{(\nu)}\right| < \frac{1}{n}\frac{u_i^n}{1-u_i} < \frac{1}{n}\frac{u_i^n}{1-u},$$

somit folgt für den absoluten Wert von $lP_{\nu,p}$ gemäss (3):

$$(7) \qquad |lP_{\nu,p}| < \rho_\nu^{(1)} + \frac{1}{2}\rho_\nu^{(2)} + \frac{1}{3}\rho_\nu^{(3)} + \dots + \frac{1}{n-1}\rho_\nu^{(n-1)} + \frac{1}{n}\frac{V_\nu}{1-u}.$$

Bezeichnet man die rechte Seite dieser Ungleichung mit γ, (die für $\lim n = \infty$ den Grenzwert Null hat) so entsteht auf Grund von (I') *die gewünschte Fehlerabschätzungsregel:*[1]

$$(\mathrm{II}) \qquad |P_{\nu,p} - 1| < e^\gamma - 1 < \frac{\gamma}{1 - \frac{\gamma}{2}}.$$

Für $n = 1$ tritt der einfachste Fall ein, dass das Produkt Π unbedingt konvergiert.

[1] Im Falle reeller v, $n = 2$, ist die Regel noch etwas schärfer, als die im ersten Schreiben angegebene, da $\frac{1}{1-u} < \frac{1}{(1-u)^2}$.

Inhaltsverzeichniss. Table des matières.

	Seite. Pages.
BAIRE, RENÉ, Sur la représentation des fonctions discontinues	1— 48
BISCONCINI, GIULIO, Sur le problème des trois corps	49— 92
MEYER, W. FR., Eine auf unendliche Produkte sich beziehende Fehlerabschätzungsregel	93— 98

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT HERAUSGEGEBEN VON

JOURNAL RÉDIGÉ PAR

G. MITTAG-LEFFLER

30: 2

STOCKHOLM

BEIJERS BOKFÖRLAGSAKTIEBOLAG.

1906.

CENTRALTRYCKERIET, STOCKHOLM.

BERLIN

MAYER & MÜLLER.

[illegible]

PARIS

A. HERMANN.

[illegible]

RECHERCHE SUR LES CHAMPS DE FORCE HYDRODYNAMIQUES

PAR

V. BJERKNES
À STOCKHOLM.

I. *Introduction.*

1. Les recherches théoriques et expérimentales de C. A. BJERKNES ont fait ressortir une analogie profonde entre certains phénomènes hydrodynamiques et les phénomènes électriques ou magnétiques.[1] Mais cette analogie n'est démontrée jusqu'ici que dans une étendue très limitée. Car les développements théoriques se restreignent au cas spécial, où les corps, qui produisent les champs, affectent la forme sphérique.

Je me propose de développer ici la théorie sans aucune restriction de cette nature.

2. Pour y arriver, j'ai changé légèrement la manière de poser le problème. Au lieu de considérer le mouvement de corps rigides, ou de corps solides élastiques, je considère le mouvement de *corps fluides* dans le fluide.

Une modification de ce genre est nécessaire au point de vue physique. Car si, dans le problème des sphères, on pousse les approximations au delà d'une certaine limite, on rencontre un défaut dans l'analogie.[2] Ce défaut est la conséquence évidente de la rigidité que possèdent les corps de forme sphérique. Car la rigidité introduit entre le corps et le fluide ambiant

---

[1] Voir V. BJERKNES: *Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte nach C. A. Bjerknes' Theorie*, vol. I et II, Leipzig 1900—02.

[2] l. c. T. II, p. 175.

un contraste qui n'a rien de correspondant dans la théorie des phénomènes électriques ou magnétiques. En effet, dans la théorie de ces phénomènes on représente à l'aide d'un même système d'équations les champs à l'intérieur des corps et les champs dans le milieu ambiant, avec cette seule différence que dans le milieu extérieur le système d'équations se réduit à une forme spécialisée. Je prends donc, dans le problème hydrodynamique, un point de départ tout-à-fait analogue; je suppose que le mouvement du système hydrodynamique est déterminé, dans toute son étendue, par les équations les plus générales des fluides parfaits; et je suppose qu'en vertu de certaines propriétés spéciales ces équations se simplifient d'une manière déterminée dans le fluide qui est extérieur aux corps fluides.

3. Le problème, étant posé de cette manière, se simplifie en même temps au point de vue mathématique. Car la recherche d'une analogie possible se réduit donc évidemment à une comparaison directe des équations hydrodynamiques avec les équations des champs électriques ou magnétiques. On serait tenté, il est vrai, de conclure de suite qu'une analogie générale n'existe pas, les équations hydrodynamiques étant totalement différentes des équations des champs électromagnétiques. Mais cette conclusion est trompeuse: on peut en transformant les équations des fluides parfaits les ramener à une forme, qui se rapproche singulièrement des équations de MAXWELL pour le cas de l'électromagnétisme stationnaire.

Je suis arrivé à cette transformation en essayant de discuter le mouvement d'un élément du fluide en m'appuyant sur les mêmes principes qui ont permis à C. A. BJERKNES de discuter le mouvement d'un corps sphérique dans le fluide. Voici l'idée qui préside à cette discussion.[1] On considère le mouvement actuel du fluide comme le résultat de la superposition de deux mouvements partiels, appelés dans la terminologie de C. A. BJERKNES, le mouvement *induit* et le mouvement *d'énergie*. C'est le mouvement induit qui constitue le *champ*, proprement dit. Le mouvement d'énergie joue un double rôle. D'un côté il correspond à l'état de *polarisation intrinsèque* des aimants permanents ou des corps à polarisation électrique intrinsèque, tels que les cristaux pyroélectriques. D'un autre coté il correspond au mouvement *visible* que prennent les corps sous l'action des

[1] l. c. T. I, p. 133—210, T. II, p. 238—274.

forces pondéromotrices du champ. Si on passe ensuite au cas où l'analogie se présente sous la forme la plus complète, c'est à dire au cas des mouvements vibratoires, la vitesse d'énergie se divise en deux parties, une partie rigoureusement périodique, qui correspond au champ intrinsèque, et une partie progressive, qui correspond au mouvement visible.

C'est en appliquant ces mêmes principes dans des conditions plus générales, qu'on arrive à la solution complète du problème des analogies entre les champs hydrodynamiques et les champs électriques ou magnétiques.

II. *Hypothèses générales.*

4. Les quantités scalaires ou vectorielles, dont on se sert dans la mécanique des milieux continus, peuvent se diviser en deux groupes distincts, que j'appellerai le groupe *cinématique* et le groupe *dynamique*. Les quantités du premier groupe dépendent seulement, comme l'indique leur nom, des notions de longueur et de temps, celles du second dépendent aussi de la notion de *densité*. J'appellerai correspondantes par rapport aux dimensions, ou simplement correspondantes, deux quantités, dont les dimensions sont les mêmes à un facteur près des dimensions de la densité, ML^{-3}.

Il est important de faire attention simultanément aux correspondances et aux différences que présentent entre elles ces quantités. C'est pourquoi je désignerai par les même lettres des quantités correspondantes, mais en marquant d'une barre la quantité appartenant au groupe dynamique.

La correspondance que je définis ainsi n'est pas uniforme au point de vue mathématique. A une quantité de l'un des groupes on peut adjoindre un nombre quelconque de quantités correspondantes qui appartiennent à l'autre groupe. Mais l'intérêt, qui s'attache à la correspondance, augmente d'autant plus que se distinguent davantage les quantités correspondantes par des analogies ou des contrastes caractéristiques dans leurs propriétés mathématiques ou physiques.

Citons un premier exemple de quantités correspondantes. La force par unité de masse, ou la force accéleratrice, dont je désigne les composantes par X, Y, Z, appartient au groupe cinématique, les dimensions étant simplement celles d'une accélération. La force par unité de volume,

$\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$, appartient au contraire au groupe dynamique. Désignant la densité par q, ou bien le volume spécifique par k,

$$k = \frac{1}{q}, \tag{a}$$

les relations entre les composantes de ces deux forces s'écriront

$$\begin{aligned} \overline{X} &= qX \quad \text{ou bien} \quad & X &= k\overline{X}, \\ \overline{Y} &= qY & Y &= k\overline{Y}, \\ \overline{Z} &= qZ & Z &= k\overline{Z}. \end{aligned} \tag{b}$$

Ces quantités correspondantes sont liées par les relations les plus simples possibles. Nous rencontrerons plus tard des quantités correspondantes qui ont entre elles des relations plus compliquées.

5. Soient maintenant x, y, z les coordonnées d'un point quelconque géométrique, u, v, w les composantes de la vitesse d'un point physique quelconque appartenant au fluide, $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ les composantes de la force par unité de volume, qui agit sur ce point fluide, p la pression et k le volume spécifique du fluide. Les équations de mouvement du fluide s'écriront alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{k}\frac{du}{dt} &= \overline{X} - \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{1}{k}\frac{dv}{dt} &= \overline{Y} - \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{1}{k}\frac{dw}{dt} &= \overline{Z} - \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned} \tag{a}$$

A ces équations dynamiques il faut ajouter l'équation de continuité, qu'on peut écrire sous la forme

$$\frac{1}{k}\frac{dk}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{b}$$

Remarquons que chacun des membres de cette équation représente la vitesse d'expansion d'un élément mobile du fluide, rapportée à l'unité de volume de cet élément.

On doit se rappeler que dans ces équations la différentiation par rapport au temps $\frac{d}{dt}$ se rapporte aux changements qui s'achèvent au point physique mobile. Si l'on veut passer aux changements qui s'achèvent au point géométrique immobile, on emploie le développement eulerien

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z} \tag{c}$$

où $\frac{\partial}{\partial t}$ se rapporte aux changements qui s'achèvent au point géométrique immobile.

III. *Transformation des équations hydrodynamiques.*

6. Les équations que je viens d'écrire servent à calculer le mouvement *actuel* du fluide. Je décomposerai ce mouvement en deux mouvements partiels, qui se distingueront l'un de l'autre par certaines propriétés caractéristiques.

En écrivant

$$\begin{aligned} u &= k\bar{u} + u_e \\ v &= k\bar{v} + v_e \\ w &= k\bar{w} + w_e \end{aligned} \tag{a}$$

je sépare la vitesse actuelle u, v, w en deux vitesses partielles, $k\bar{u}$, $k\bar{v}$, $k\bar{w}$ et u_e, v_e, w_e, que j'appellerai plus tard, après les avoir complètement determinées, la *vitesse induite* et la *vitesse d'énergie*. J'ai écrit les composantes de la première sous la forme $k\bar{u}, k\bar{v}, k\bar{w}$, par ce qu'il est préférable, ainsi qu'on le verra par la suite, de représenter le mouvement induit non pas par sa vitesse, mais par le vecteur $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, quantité de mouvement par unité de volume. J'appellerai ce vecteur *l'intensité de champ*[1] du mouvement induit.

La vitesse u, v, w du mouvement actuel, et l'intensité de champ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ du mouvement induit, sont des quantités, dont la correspondance (4) joue pour nous le rôle le plus important. Cette correspondance se

[1] l. c. I, p. 139.

réduit à une simple proportionalité dans le cas spécial, où la vitesse u_e, v_e, w_e du mouvement énergetique est égale à zéro.

7. Je considère maintenant le membre de gauche de la première équation de mouvement (5, a). La substitution de la valeur de u (6, a) donne pour ce membre

$$\frac{1}{k}\frac{du}{dt} = \frac{1}{k}\frac{d(k\bar{u})}{dt} + \frac{1}{k}\frac{du_e}{dt}.$$

En effectuant la différentiation du premier terme du second membre et tenant compte de (5, b) on trouve

$$\text{(a)} \qquad \frac{1}{k}\frac{du}{dt} = \frac{d\bar{u}}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\bar{u} + \frac{1}{k}\frac{du_e}{dt}.$$

Le premier terme du 2ème membre de cette équation s'écrit en vertu du développement eulerien (5, c)

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + u\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + w\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$

ou ensuite

$$\text{(b)} \qquad \frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + u\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + w\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + w\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right) - v\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right).$$

Dans le trinome du second membre j'exprime, en vertu de (6, a), la vitesse actuelle u, v, w à l'aide des deux vitesses partielles. Ce trinome peut donc s'écrire

$$u\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + w\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = \frac{1}{2}k\frac{\partial}{\partial x}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) + u_e\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v_e\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + w_e\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}$$

ou bien, si on sépare un terme qui a la forme d'une dérivée par rapport à x

$$u\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + w\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{1}{2}k(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2) + \bar{u}u_e + \bar{v}v_e + \bar{w}w_e\right\}$$

$$- \left\{\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x} + \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial x}\right\}.$$

Si, dans la première parenthèse, on élimine u_e, v_e, w_e à l'aide des équations (6, a), on obtient

$$u\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + w\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{u\bar{u} + v\bar{v} + w\bar{w} - \frac{1}{2}k(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\right\}$$
$$- \left\{\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x} + \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial x}\right\}.$$

En introduisant ce développement en (b), et ensuite le développement (b) en (a), il vient enfin

$$\text{(c)} \quad \frac{1}{k}\frac{du}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{u\bar{u} + v\bar{v} + w\bar{w} - \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\right\}$$
$$+ \frac{1}{k}\frac{du_e}{dt} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\bar{u} - \left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x}\right)$$
$$- \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial x} + w\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right) - v\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right).$$

C'est l'expression plus développée du premier membre de la première équation de mouvement (5, a).

8. J'écris donc sous cette forme le membre de gauche de la première équation de mouvement (5, a). Je soumets ensuite l'intensité de champ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ à la condition de satisfaire à l'équation

$$\text{(a)} \qquad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{p + u\bar{u} + v\bar{v} + w\bar{w} - \frac{1}{2}k(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\right\}.$$

La vitesse u_e, v_e, w_e satisfera donc à l'équation

$$\text{(b)} \qquad \frac{1}{k}\frac{du_e}{dt} = \bar{X} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\bar{u} + \left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial x} - w\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right).$$

Ces deux équations, et les autres qui s'en déduisent par symétrie, déterminent les deux mouvements partiels. Et ces deux mouvements ainsi déterminés apparaissent comme jouissant de propriétés bien différentes.

Les équations (a) du premier mouvement partiel contiennent la pression p. Ce mouvement est donc de nature hydrodynamique proprement dite. Il existe partout où il y a de la pression variable de point à point. Son champ s'étendra donc en général à tout le fluide. C'est le mouvement que j'appellerai *le mouvement induit.*

Les équations (b) du second mouvement partiel contiennent la force extérieure $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$, et en outre une force fictive d'origine hydrodynamique, dont la première composante est

$$\text{(c)} \qquad \overline{X}_e = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\bar{u} + \left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial x} - w\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right).$$

Rien n'exige d'ailleurs, que ces forces soient répandues dans tout l'espace. Ce mouvement partiel peut donc être un mouvement de nature locale, qui n'existe que dans certaines parties limitées du fluide. En conservant la terminologie de C. A. Bjerknes j'appellerai ce mouvement partiel *le mouvement d'énergie* et la force fictive (c) *la force d'énergie hydrodynamique.* [1]

9. Au système des équations originaires, 5, a et b, qui détermine le mouvement actuel du fluide, on peut ainsi substituer un système d'équations plus développé, qui détermine en même temps le mouvement actuel, le mouvement partiel induit et le mouvement partiel énergétique. Voici ce système d'équations.

Le mouvement actuel se détermine en fonction des deux mouvements partiels par les équations de connexion

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} u &= k\bar{u} + u_e \\ v &= k\bar{v} + v_e \\ w &= k\bar{w} + w_e \end{aligned}$$

Les variations dans le temps du mouvement induit se déterminent par les équations

---

[1] l. c. T. I, p. 133—139.

$$
\text{(B)}\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial x}\left\{p + u\bar{u} + v\bar{v} + w\bar{w} - \frac{1}{2}k(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\right\}\\
\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial y}\left\{p + u\bar{u} + v\bar{v} + w\bar{w} - \frac{1}{2}k(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\right\}\\
\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial z}\left\{p + u\bar{u} + v\bar{v} + w\bar{w} - \frac{1}{2}k(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\right\}.
\end{aligned}
$$

Les variations dans le temps du mouvement d'énergie se déterminent par les équations

$$
\text{(C}_1\text{)}\qquad
\begin{aligned}
\frac{1}{k}\frac{dv_e}{dt} &= \overline{X} + \overline{X}_e,\\
\frac{1}{k}\frac{dv_e}{dt} &= \overline{Y} + \overline{Y}_e,\\
\frac{1}{k}\frac{dw_e}{dt} &= \overline{Z} + \overline{Z}_e,
\end{aligned}
$$

dans lesquelles la force d'énergie hydrodynamique $\overline{X}_e$, $\overline{Y}_e$, $\overline{Z}_e$ est donnée par les expressions

$$
\text{(C}_2\text{)}\qquad
\begin{aligned}
\overline{X}_e = &-\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\bar{u} + \left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x}\right)\\
&+ \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial x} - w\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right) + v\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right),\\
\overline{Y}_e = &-\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\bar{v} + \left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial y} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial y}\right)\\
&+ \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial y} - u\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}\right) + w\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right),\\
\overline{Z}_e = &-\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\bar{w} + \left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial z} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial z} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial z}\right)\\
&+ \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial z} - v\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right) + u\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right).
\end{aligned}
$$

A ces équations il faut ajouter l'équation de continuité

$$
\text{(D)}\qquad \frac{1}{k}\frac{dk}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.
$$

Pour des raisons qu'on trouvera justifiées par les développements ultérieurs de ce mémoire on peut appeler ce système d'équations *la forme électroidique* des équations hydrodynamiques.

IV. *Discussion générale.*

10. On sait que deux quantités dérivées déterminent la nature de la distribution dans l'espace d'un vecteur quelconque u, v, w. Ce sont la quantité scalaire

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=e, \tag{a}$$

qu'on appelle *la divergence*, et le vecteur

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}&=l,\\ \frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}&=m,\\ \frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}&=n,\end{aligned} \tag{b}$$

qu'on appelle *la rotation* (ou bien le *curl*) du vecteur primaire u, v, w.

Dans le cas où il existe des surfaces de discontinuité, on rencontre comme cas limite de la divergence (a) la différence des composantes normales du vecteur u, v, w de part et d'autre de la surface: c'est la *divergence de surface.* De même on rencontre comme cas limite de la rotation (b) la différence géométrique des composantes tangentielles de part et d'autre de la surface: c'est la *rotation de surface* (ou bien le glissement) à la surface de discontinuité. Nous pouvons donner à nos théorèmes en même temps une généralité et une simplicité très convenables en prenant les notions de divergence et de rotation dans le sens général où elles comprennent la divergence de surface et la rotation de surface. C'est ce que nous ferons toujours.

Si la divergence est nulle, le champ du vecteur s'appelle *solenoidal;* si la rotation est nulle, le champ s'appelle *irrotationel* ou bien *potentiel,* par ce que dans ce cas les composantes du vecteur sont les dérivées d'une fonction potentielle.

On peut considérer la divergence et la rotation en quelque sorte comme les dérivées d'un champ de vecteur. Si on les connait, on peut, par un procédé d'intégration, déterminer le champ du vecteur primaire u, v, w à un champ solenoidal et irrotationel près, qui joue le rôle de constante d'intégration. Ce champ possède un potentiel qui satisfait à l'équation de LAPLACE, et qui se détermine à l'aide des conditions aux surfaces limites du champ. En d'autres termes, la détermination de ce champ revient à la solution du problème de DIRICHLET.

Dans les recherches générales de la mathématique physique on se débarrasse ordinairement de la solution de ce problème. On y arrive en supposant que le champ s'étend à l'infini, mais qu'il a ses divergences et ses rotations dans l'éspace fini. Dans ces conditions on peut supposer, sans contradiction, que le vecteur disparait à l'infini, et le champ de LAPLACE disparait alors identiquement. Dans ce cas la divergence et la rotation déterminent donc uniformément le champ du vecteur primaire.

Si à cette propriété mathématique s'ajoutent des propriétés physiques fondamentales, ces quantités dérivées joueront forcément un grand rôle dans la théorie des phénomènes en question, ainsi que le prouvent un grand nombre d'exemples de la physique mathématique. Examinons donc la divergence et la rotation des deux vecteurs fondamentaux de notre problème, c'est à dire de la vitesse actuelle u, v, w et de l'intensité de champ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$.

11. Quand il s'agit de la vitesse actuelle u, v, w, la divergence e, qu'on calcule par l'équation (10, a), exprime simplement la vitesse d'expansion d'un élément mobile du fluide, rapportée à l'unité de volume de cet élément. L'équation (a) est ainsi équivalente à l'équation de continuité (D), et on est donc amené nécessairement à considérer cette divergence comme une des quantités fondamentales de notre problème. La condition spéciale

$$\text{(a)} \qquad e = 0$$

exprime l'incompressibilité de l'élément fluide mobile. Dans la partie du fluide où cette condition est satisfaite la distribution de la vitesse actuelle est solenoidale.

La rotation (b) de la vitesse actuelle est la quantité qu'on appelle aussi quelque fois le tourbillon. Je préfère l'appeler *la densité de tourbillon,* et donner le nom de *tourbillon* à l'intégrale de sa composante normale prise sur une surface. C'est le tourbillon ainsi défini qui, d'après les célèbres théorèmes de v. HELMHOLTZ, se conserve tout le long d'une surface matérielle mobile dans le fluide. Mais dans les conditions que suppose notre problème, les hypothèses sur lesquelles repose la démonstration des théorèmes de v. HELMHOLTZ ne sont pas en général remplies. Pendant le mouvement des tourbillons naissent et disparaissent et le vecteur (b) n'a pas de propriétés générales assez simples pour prendre place parmi les quantités que nous considérons comme fondamentales.

Remarquons enfin que les quantités dérivées de la vitesse actuelle, que nous venons de considérer, appartiennent à la classe des quantités cinématiques. Pour les distinguer de quantités analogues, qui se présenteront tout à l'heure, nous complèterons leur désignation par l'adjonction de l'adjectif *cinématique.*

12. La divergence de l'intensité de champ

(a) $$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = \bar{e}$$

est la quantité dynamique qui correspond à la vitesse d'éxpansion cinématique e. Elle n'a pas en général de signification ou de propriétés physiques très simples. Elle ne jouera donc pas de rôle absolument fondamental, et cependant, en raison des propriétés remarquables de l'intensité de champ, elle nous rendra de grands services pour la représentation analytique des phénomènes.

La rotation de l'intensité de champ jouit au contraire d'une propriété physique très remarquable. Des deux dernières équations du mouvement induit (B) on tire immédiatement

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z}\right) = 0.$$

On peut y ajouter deux équations analogues, et l'intégration immédiate de ces équations donne

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = \bar{l},$$

$$\text{(b)} \qquad \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = \bar{m},$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \bar{n}.$$

Les composantes de la rotation de l'intensité de champ sont donc des constantes d'intégration. Et l'opération $\frac{\partial}{\partial t}$ se rattachant aux changements qui s'achèvent au point géométrique considéré, on voit que le vecteur $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ possède en chaque point de l'espace une direction et une valeur absolue indépendantes du temps.

Nous appellerons ce vecteur *la densité de tourbillon dynamique*, et son intégrale de surface le *tourbillon dynamique*. Cette intégrale de surface est naturellement indépendante du temps, comme la densité de tourbillon. Le mouvement induit possède donc une propriété extrêmement remarquable que l'on peut énoncer ainsi:

Le mouvement partiel induit est un mouvement à tourbillons dynamiques invariables et stationnaires dans l'espace.

Les quantités $\bar{e}$ et $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ ont ainsi en général des propriétés bien différentes de celles des quantités cinématiques correspondantes e, l, m, n. Mais dans un cas spécial ces propriétés se rapprochent: C'est lorsque la vitesse d'énergie devient identiquement nulle $u_e = v_e = w_e = 0$ et qu'en même temps le fluide est homogène, $k = k_0$. On a donc

$$\text{(c)} \qquad \begin{array}{lcl} u = k_0 \bar{u} & & l = k_0 \bar{l}, \\ v = k_0 \bar{v} & e = k_0 \bar{e} & m = k_0 \bar{m}, \\ w = k_0 \bar{w} & & n = k_0 \bar{n}. \end{array}$$

Dans ce cas les quantités cinématiques et les quantités correspondantes dynamiques sont simplement proportionnelles entre elles avec le facteur de proportionalité constant k_0.

Du théorème ci-dessus il résulte le corollaire suivant:

Si à une époque quelconque le mouvement induit ne comporte pas de tourbillons dynamique dans un certain espace, il n'en comportera jamais dans cet espace.

En raison de cette propriété le cas où ces tourbillons sont nuls est particulièrement important. Dans un espace où ces tourbillons n'existent pas l'intensité de champ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ dépendra à toute époque d'un potentiel

$$\text{(d)} \qquad \bar{u} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}, \qquad \bar{v} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}, \qquad \bar{w} = \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z}.$$

Ces expressions rendent immédiatement intégrables les équations (E). Après l'intégration ces équations se réduisent à une seule, savoir

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial t} = P - p - u\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} - v\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} - w\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} + \frac{1}{2}k\left\{\left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z}\right)^2\right\}$$

ou bien, en vertu de (5, c)

$$\text{(e)} \qquad \frac{d\bar{\varphi}}{dt} = P - p + \frac{1}{2}k\left\{\left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z}\right)^2\right\}.$$

Ici la constante d'intégration P est indépendante des coordonnées et ne peut dépendre que du temps. La formule permet de calculer la pression p, si l'on connait en même temps le mouvement actuel et le mouvement induit.

13. Nous sommes maintenant en état de démontrer une propriété importante du second mouvement partiel, le mouvement d'énergie.

Des équations (C_1) on conclut que la vitesse d'énergie, que possède un élément mobile du fluide, peut subir des variations par suite de deux causes, l'action d'une force extérieure $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ et l'action d'une force hydrodynamique d'énergie $\bar{X}_e, \bar{Y}_e, \bar{Z}_e$. Supposons qu'aucune force extérieure n'agite l'élément consideré et examinons de plus près la force d'énergie hydrodynamique, (C_2). Le premier terme de cette force disparaîtra, si la vitesse actuelle u, v, w n'a pas de divergence, c'est à dire si l'élément en

question ne possède pas de vitesse d'expansion e. Le troisième terme disparaîtra, si le volume spécifique k n'est pas variable de point à point dans l'élément. Le quatrième et le cinquième termes disparaîtront, si, dans le volume de l'élément, l'intensité de champ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ ne possède pas de tourbillon. Si nous supposons donc que l'élément considéré appartienne à une partie du fluide homogène et incompressible, et à une partie de l'espace où le mouvement induit ne possède pas de tourbillon dynamique, l'expression de la force d'énergie hydrodynamique se réduira au second terme du deuxième membre des équations (C_2). Le système (C_1) se réduit donc à l'équation

$$\frac{1}{k}\frac{du_e}{dt} = \bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x}$$

et aux deux autres qui s'en déduisent par symétrie. Ces équations nous montrent, que dans les conditions que nous avons définies, la vitesse d'énergie ne peut varier que si elle préexiste déjà dans l'élément fluide considéré. Si donc l'élément ne possède pas de vitesse d'énergie dès l'origine, il n'en aura jamais. On trouve donc le résultat suivant:

Une vitesse d'énergie n'existe jamais dans une partie du fluide qui satisfait à la fois aux cinq conditions suivantes: n'etre soumise à l'action d'aucune force extérieure; être homogène; être incompressible; avoir à l'origine une vitesse d'énergie nulle; appartenir à un espace dans lequel à l'origine du temps il n'existe pas de tourbillons dynamiques du mouvement induit.

V. *Suppositions sur la constitution du système fluide.*

14. Nous allons considérer dès maintenant un système fluide d'une constitution spéciale. Le théorème énoncé ci-dessus nous permet de concevoir un système, tel que certaines parties limitées du fluide possèdent seules la vitesse d'énergie, ou la faculté d'en pouvoir acquérir, tandis que l'autre partie, qui est illimitée, n'en possède pas, et n'en peut acquérir. Désignons la partie illimitée du nom de *fluide fondamental*, et appelons *corps* les parties limitées. Ces corps ne doivent exister qu'en nombre fini et dans une région finie de l'espace.

Les conditions qui doivent être satisfaites par le fluide fondamental sont, d'après le théorème ci-dessus, les suivantes: il doit être homogène et

incompressible, être exempt de l'action de toute force extérieure, et dépuis l'origine du temps être dénué de vitesse d'énergie et de tourbillon dynamique. Les corps se distingueront du fluide fondamental par une ou par plusieurs des qualités suivantes:

1. Posséder des vitesses d'énergie u_e, v_e, w_e.

2. Posséder des vitesses d'expansion e.

3. Posséder un volume spécifique k, différent du volume spécifique constant k_0 du fluide fondamental.

4. Posséder des tourbillons dynamiques du mouvement induit, avec la densité de tourbillon $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$.

Le tourbillon dynamique étant stationnaire dans l'espace (12), il en résulte que tout corps qui possède de tels tourbillons est aussi stationnaire dans l'espace. Nous verrons plus tard l'importance de cette remarque. Les corps, au contraire, qui n'ont pas ce mouvement tourbillonnaire, peuvent changer d'une manière quelconque leur forme ou leur position dans l'espace.

15. En traitant la dynamique de ce système on doit se rappeler que la transformation des équations hydrodynamiques, que nous avons effectuée, suppose dès l'origine une continuité complète. En effet les équations transformés contiennent des dérivées de quantités telles que $k, u, v, w, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, u_e, v_e, w_e$. On est ainsi amené à admettre qu'il n'y a pas de changement brusque aux surfaces limites des corps: On imagine l'existence de couches de passage, dans lesquelles, avec une vitesse aussi grande que l'on voudra mais toujours d'une manière continue, les propriétés du corps convergent vers celles du fluide fondamental. Dans ces couches la vitesse d'énergie u_e, v_e, w_e, la densité de tourbillon $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$, et la vitesse d'expansion e tendent vers zéro, et le volume spécifique k vers la valeur constante k_0, qu'il garde partout dans le fluide fondamental. Naturellement cette couche de passage appartient au corps, et à la surface limite le corps possède déjà toutes les propriétés du fluide fondamental.

Mais il n'est pas nécessaire d'introduire cette hypothèse de continuité. On sait que les équations hydrodynamiques primitives n'exigent d'autre continuité que celle de la non-existence de vides dans l'intérieur du fluide. Rien n'empèche donc de faire disparaître l'épaisseur des couches de passage et de chercher les limites vers lesquelles convergent alors les équations (9)

pour les points de ces couches. On trouve donc qu'il se sépare de la force (9, C_2) une force qui s'applique aux éléments de la surface de discontinuité, et qu'il faut compter par unité de surface. D'ailleurs on peut opérer *comme si la condition de continuité était toujours remplie,* à la condition de compter les divergences des vecteurs en question comme comprenant aussi les divergences de surface, et de compter les rotations des vecteurs comme comprenant aussi les rotations de surface. C'est ce que nous ferons toujours.

En procédant ainsi, nous considérons donc toujours les intégrales de volume où figurent les divergences ou les rotations, comme contenant implicitement des intégrales de surface dans lesquelles figurent les divergences ou les rotations de surface. Ce sont les intégrales de surface qui proviennent des intégrales de volume dans les couches de passage, quand on fait disparaître l'épaisseur de ces couches.

16. Examinons maintenant le mouvement dans le fluide fondamental.

La vitesse d'énergie étant ici nulle, le mouvement actuel s'identifie avec le mouvement induit, ce qui s'exprime par les équations

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} u &= k_0 \bar{u}\,, \\ v &= k_0 \bar{v}\,, \\ w &= k_0 \bar{w}, \end{aligned}$$

k_0 étant le volume spécifique constant du fluide fondamental. Le tourbillon dynamique étant nul, l'intensité de champ dépend d'un potentiel uniforme ou non uniforme $\bar{\varphi}$, et la vitesse actuelle u, v, w, qui est simplement proportionnelle à l'intensité de champ, dépendra aussi d'un potentiel $\varphi = k_0 \bar{\varphi}$. En introduisant l'un ou l'autre de ces potentiels dans l'équation de continuité, on trouve qu'ils satisfont à l'équation de Laplace. Le champ de l'un ou de l'autre de ces deux vecteurs est donc le champ solenoidal et irrotationnel bien connu. La valeur numérique des vecteurs disparait donc à l'infini au moins comme des quantités du second ordre, les potentiels au moins comme des quantités du premier ordre. Ces propriétés du champ dans ses parties infiniment éloignées nous permettent d'effectuer ci-dessous, par la manière connue, les intégrations par parties de certaines intégrales cubiques qui sont étendues à tout l'espace.

17. Le mouvement des corps se distingue de celui du fluide fondamental par l'existence d'une quantité scalaire, la vitesse d'expansion e, et de deux quantités vectorielles, la vitesse d'énergie u_e, v_e, w_e et la densité de tourbillon dynamique $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$.

Considérons l'intégrale de volume

$$T = \int \frac{1}{2k}(u^2 + v^2 + w^2)d\tau \tag{a}$$

qui, étendue à tout l'espace, représente l'énergie cinétique du système. Montrons qu'on peut exprimer cette énergie à l'aide d'une intégrale qui s'étend aux corps seulement.

Écrivons la vitesse actuelle u, v, w sous la forme

$$u = k\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y},$$

$$v = k\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z},$$

$$w = k\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z} + \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}.$$

L'expression de T peut donc s'écrire

$$T = \frac{1}{2}\int\left(u\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x} + v\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y} + w\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z}\right)d\tau$$
$$+ \int\frac{1}{2k}\left\{u\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) + v\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\right) + w\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)\right\}d\tau.$$

Dans la seconde intégrale du second membre, exprimons la vitesse induite $k\bar{u}, k\bar{v}, k\bar{w}$ à l'aide de la vitesse actuelle et de la vitesse d'énergie (9, A). Alors

$$T = \frac{1}{2}\int\left(u\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x} + v\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y} + w\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z}\right)d\tau$$
$$+ \int\frac{1}{2k}\left\{u_e\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) + v_e\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\right) + w_e\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)\right\}d\tau$$
$$+ \frac{1}{2}\int\left\{\bar{u}\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) + \bar{v}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\right) + \bar{w}\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)\right\}d\tau.$$

Toutes ces intégrales devraient s'étendre à l'espace entier. Mais la vitesse d'énergie n'existant que dans les corps, il suffit d'étendre la seconde intégrale aux corps seulement. Sur les deux autres on peut effectuer une intégration par parties, qu'on peut ensuite, en vertu des propriétés du champ dans les régions infiniment éloignées (16), étendre à tout l'espace. Les intégrales de surface, qui ressortent de l'intégration par partie, disparaissent donc, et en tenant compte des relations (10, a) et (12, b) on trouve l'expression suivante de l'énergie T

$$\text{(b)} \qquad T = -\frac{1}{2}\int e\bar{\varphi}\,d\tau$$
$$+ \int \frac{1}{2k}\left\{u_e\left(\frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}\right) + v_e\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}\right) + w_e\left(\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)\right\}d\tau$$
$$-\frac{1}{2}\int(\bar{l}L + \bar{m}M + \bar{n}N)\,d\tau$$

la première et la dernière intégrale contenant implicitement, dans le cas de discontinuités, des intégrales de surface (15).

Dans toutes ces intégrales l'expression sous le signe somme est identiquement nulle en tous les points du fluide fondamental, et nous avons donc réussi à exprimer l'énergie du mouvement induit à l'aidè d'intégrales qu'il suffit d'étendre au volume des corps.

18. Nous allons en tirer une conséquence importante.

Supposons la vitesse d'énergie u_e, v_e, w_e, le tourbillon $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ et la vitesse d'expansion e égales à zéro. L'énergie T disparait comme le montre l'expression (17, b). Mais quand T disparait, l'expression (17, a) nous montre que la vitesse actuelle u, v, w disparait aussi dans tous les points de l'espace. La vitesse d'énergie étant déjà nulle par hypothèse, il en résulte que le mouvement induit disparait aussi. Dans ces conditions il n'existe plus de mouvement.

Cela étant, considérons deux champs différents, ayant en chaque point les mêmes valeurs de la vitesse d'énergie, u_e, v_e, w_e, du tourbillon $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ et de la vitesse d'expansion e. La différence de ces deux champs de mouvement est donc un champ dans lequel toutes ces quantités sont identiquement égales à zéro, c'est à dire, d'après ce que nous venons de voir,

un champ qui disparait complètement. Les deux champs ne peuvent donc pas différer l'un de l'autre, et il en résulte le théorème que voici.

La vitesse d'énergie, le tourbillon dynamique du mouvement induit et la vitesse d'expansion du mouvement actuel déterminent le champ de mouvement d'une manière uniforme.

19. Pour nous rendre compte de la généralité du théorème, remarquons que les corps tels que nous les avons définis peuvent avoir un mouvement quelconque. Car les forces extérieures, qui produisent le mouvement, ne sont soumises à aucune restriction. Rien ne nous empèche donc de supposer l'existence de forces qui par exemple donnent à ces corps le mouvement de corps rigides, ou de corps solides élastiques.

On a donc le droit de supposer aussi que les corps, que nous avons définis, sont réellement des corps rigides ou des corps solides élastiques. Si l'on s'imagine ces corps liquéfiés, et que l'on détermine les forces nécessaires pour leur donner, dans ces conditions, le même mouvement qu'ils auraient étant solides, et si l'on détermine ensuite les deux mouvements partiels d'après les équations (9), on peut appliquer le théorème énoncé. Dans ce sens le théorème, ainsi que tous les résultats que nous développerons ci-dessous, s'appliqueront à des corps étrangers quelconques qui se meuvent dans le fluide. Dans ces applications on doit tenir compte des divergences ou des tourbillons de surface qui existent sur les surfaces limites entre le fluide fondamental et les corps. La considération de ces divergences et de ces tourbillons de surface revient à ceci, qu'en calculant les divergences et les tourbillons, on compte la surface adjacente du fluide fondamental comme appartenant au corps.

En tout cas le théorème conduit à ce résultat remarquable que certaines particularités du mouvement, que possèdent les différents éléments des corps, (y compris en cas de discontinuité le mouvement des éléments immédiatement adjacents du fluide ambiant), déterminent le champ de mouvement dans chaque point de l'espace. On peut imaginer ce résultat découvert expérimentalement par un observateur qui ne possède que des méthodes indirectes pour observer les champs et les différentes particularités du mouvement. On comprend facilement qu'un tel observateur, en trouvant le résultat que nous venons d'énoncer, soit tenté d'en donner une

interprétation physique spéciale, en l'attribuant à une action à distance émanant des différents éléments de volume des corps, et se faisant sentir en tout point de l'éspace. Voilà le premier germe des phénomènes d'actions apparentes à distance, que nous étudierons ci-dessous.

VI. *Analogie géométrique directe des champs hydrodynamiques et des champs électromagnétiques stationnaires.*

20. Appliquons le théorème ci-dessus en considérant dès maintenant la vitesse d'énergie u_e, v_e, w_e, le tourbillon dynamique $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ et la vitesse d'expansion e comme des quantités données. Les équations, qui déterminent uniformément le champ en fonction de ces quantités données, sont donc les suivantes

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} u &= k\bar{u} + u_e, \\ v &= k\bar{v} + v_e, \\ w &= k\bar{w} + w_e, \end{aligned}$$

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= \bar{l}, \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} &= \bar{m}, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} &= \bar{n}, \end{aligned}$$

$$\text{(C)} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = e$$

auxquelles on doit joindre les conditions suivantes, qui s'appliquent au fluide fondamental

$$\text{(D)} \qquad \begin{aligned} u_e &= 0, & \bar{l} &= 0, & e &= 0, \\ v_e &= 0, & \bar{m} &= 0, & k &= k_0, \\ w_e &= 0, & \bar{n} &= 0, \end{aligned}$$

k_0 étant constant en chaque point du fluide fondamental.

21. Comparons maintenant ce système hydrodynamique à un système électromagnétique, consistant en un certain nombre de corps limités, environnés d'un milieu extérieur, qui s'étend à l'infini. Le milieu extérieur doit être homogène, et en outre dénué de toute polarisation intrinsèque, et de toute distribution de masses magnétiques ou de courants électriques. Les corps doivent se distinguer du milieu extérieur par une ou par plusieurs des propriétés suivantes:

1. Posséder des polarisations magnétiques intrinsèques, u_e, v_e, w_e.

2. Posséder une distribution de masses magnétiques avec la densité e.

3. Posséder une perméabilité magnétique k différente de la perméabilité constante k_0 du milieu extérieur.

4. Posséder une distribution de courants électriques avec la densité $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$.

Sous ces conditions il existe dans l'espace entier, dans le milieu extérieur ainsi que dans l'intérieur des corps, un champ magnétique stationaire uniformément déterminé. Définissons ce champ à l'aide de deux vecteurs, savoir *l'intensité de champ magnétique* $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, et *l'induction* (dans la terminologie de HERTZ *la polarisation*) *magnétique* u, v, w. Supposons enfin qu'on exprime toutes les quantités dans le système d'unités rationelles de M. OLIVER HEAVISIDE.[1] Le système d'équations, qui détermine la distribution des deux vecteurs dans l'espace, est donc justement le système (20, A—D), qui détermine la distribution des vecteurs correspondants, de la vitesse u, v, w et de l'intensité de champ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, dans le système hydrodynamique.

En particulier, les équations (A) sont les équations de connection, qui expriment l'induction (la polarisation) en fonction de l'intensité de champ et de la polarisation intrinsèque. (B) sont les équations qui déterminent le courant électrique en fonction de l'intensité de champ magnétique. (C) est l'équation qui détermine la densité magnétique vraie (s'il en existe) en fonction de l'induction magnétique. Les équations (D) donnent enfin les simplifications qu'on admettra par hypothèse dans le milieu extérieur.

Si l'on avait employé les unités magnétiques traditionnelles, les équations du champ magnétique auraient été encore les équations (A—C), avec cette seule différence que le dernier terme à droite de chaque équation

[1] OLIVER HEAVISIDE, *Electromagnetic Theory*, London 1893. T. I, p. 116—125.

aurait été affecté du facteur numérique irrationel 4π. En introduisant dans l'hydrodynamique un système d'unitès affectant la même irrationalité, on peut naturellement donner aux formules hydrodynamiques la même forme irrationelle. Mais cette observation n'a d'autre intérêt que de montrer, à l'aide de cette image dynamique des phénomènes électromagnétiques, l'absurdité complète du système d'unités qu'on emploie aujourd'hui dans la science de l'électricité et du magnétisme.[1]

22. Le dualisme bien connu des phénomènes électriques et magnétiques a pour conséquence qu'on peut encore comparer, à un autre point, les phénomènes hydrodynamiques aux phénomènes électromagnétiques. Au lieu de considérer le champ magnétique on peut considérer le champ électrique d'un système de corps, possèdants une distribution de masses électriques vraies de densité e, des polarisations électriques intrinsèques u_e, v_e, w_e, une distribution de »courants magnétiques stationnaires» avec la densité $-\bar{l}, -\bar{m}, -\bar{n}$, et enfin des constantes diélectriques k variables d'une manière quelconque. Les équations (20, A—D) sont alors les équations qui déterminent la distribution de l'intensité de champ électrique $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ et de l'induction (la polarisation) électrique u, v, w.

Dans la pratique, suivant les circonstances, on adoptera l'une ou l'autre de ces comparaisons. La seconde présente cet avantage qu'une densité électrique vraie existe réellement, tandis qu'on ne connait pas de densité magnétique vraie. C'est donc seulement avec ce dernier mode de comparaison qu'on trouve une quantité physique réelle qui corresponde à la vitesse d'expansion e. En revanche le premier mode de comparaison a l'avantage que le tourbillon dynamique corresponde au courant électrique stationnaire qui existe réellement. Le courant magnétique, au contraire, n'est pas en général stationnaire ou ne peut l'être que momentanément. Néanmoins, pour des raisons de symétrie, il est commode de faire figurer dans les formules des symboles qui représentent ces quantités fictives, les masses magnétiques vraies et les courants magnétiques stationnaires.

23. Nous pouvons donc résumer, dans le tableau synoptique suivant, les résultats que nous venons d'obtenir, relativement à l'analogie des champs

---

[1] V. Bjerknes, *Hydrodynamische Fernkräfte*, t. II, p. 228.

de mouvement hydrodynamiques avec les champs électriques ou magnétiques. Les notions qui n'ont qu'un sens fictif, et que nous ne gardons que pour conserver toute la généralité du problème, sont mises entre crochets.

	champ hydrodynamique	champ magnétique	champ électrique
u, v, w	Vitesse actuelle	Induction magnétique	Induction électrique
$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$	Intensité de champ hydrodynamique	Intensité de champ magnétique	Intensité de champ électrique
u_e, v_e, w_e	Vitesse d'énergie	Polarisation magnétique intrinsèque	Polarisation électrique intrinsèque
e	Vitesse d'expansion par unité de volume	[Densité des masses magnétiques vraies]	Densité des masses électriques vraies
$\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$	Densité de tourbillon dynamique	Densité de courant électrique stationnaire	[Densité de courant magnétique stationnaire]
k	Volume spécifique	Perméabilite magnétique	Constante diélectrique

L'analogie se restreint au cas des champs électriques ou magnétiques stationnaires. Par la voie que nous avons suivie on n'arrive pas à une analogie hydrodynamique des phénomènes électromagnétiques les plus généraux. L'analogie cesse d'exister justement au point où commence le croisement des phénomènes électriques et magnétiques, et on n'arrive ainsi qu'à définir une analogie d'ordre électrique et à une analogie d'ordre magnétique, ces deux analogies n'ayant entre elles aucune connexion.

La cause pour laquelle l'analogie cesse justement d'exister en ce point est bien claire. Au moment où le courant, qu'il soit électrique ou magnétique, devient variable, l'existence d'un champ magnétique est nécessairement accompagnée d'un champ électrique, et vice versa. Mais, dans l'image hydrodynamique des phénomènes électriques ou magnétiques, ce qui correspond au courant, c'est le tourbillon dynamique du mouvement induit, et ce tourbillon a nécessairement un caractère stationnaire par rapport à l'espace et par rapport au temps. (12).

Si donc l'on veut étendre l'analogie au delà de la limite qui nous arrête ainsi, il faut modifier essentiellement la manière de poser le problème dynamique. Mais n'abordons pas cette question des généralisations possibles de l'analogie. Bornons nous à l'approfondir dans son étendue limitée.

VII. *Analogie dynamique inverse des champs hydrodynamiques et des champs électriques ou magnétiques stationnaires.*

24. Au point de vue géométrique il existe, ainsi que nous l'avons démontré, une identité complète entre les champs hydrodynamiques que nous étudions, et les champs électriques ou magnétiques stationnaires. Occupons nous maintenant de la dynamique des mêmes champs.

Des équations (9, B) nous pouvons déduire la valeur de la force qui produit le mouvement induit, la force d'induction [1] dans la terminologie de C. A. Bjerknes. Mais une discussion ultérieure de cette force n'a pas d'intérêt pour le but que nous poursuivons ici. Car d'un côté, sans nous occuper de l'expression explicite de cette force, nous avons pu déduire toutes les propriétés géométriques des champs, et en démontrer l'analogie avec les champs électriques ou magnétiques. D'un autre côté, la dynamique interne de ces derniers champs nous est complètement inconnue, et la discussion de la dynamique des champs correspondants hydrodynamiques ne peut donc pas, dans l'état actuel de nos connaissances, servir à approfondir l'analogie qui nous occupe.

25. Il reste donc à discuter la dynamique du mouvement énergétique. D'après les équations (9, C), ce mouvement partiel est l'effet de l'action combinée de deux forces, une force extérieure non hydrodynamique $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$,

---

[1] Remarquons que les seconds membres de ces équations ne représentent pas les composantes de cette force. En effet, les premiers membres n'ont pas la forme du produit d'une densité par une accélération. C'est d'ailleurs un avantage important de la méthode que nous employons ici, que de permettre d'éviter toute considération explicite de la force d'induction avec ses propriétés bizarres. La forme des équations (9, B) nous permettent de déduire les propriétés géométriques du mouvement induit sans nous occuper de ses propriétés dynamiques.

et une force due à la pression du fluide, la force d'énergie hydrodynamique $\overline{X}_e, \overline{Y}_e, \overline{Z}_e$. En tenant compte des équations (10, a) et (12, b) nous pouvons écrire les expressions des composantes de cette seconde force

$$
\text{(A)} \quad
\begin{aligned}
\overline{X}_e &= -e\bar{u} + \left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial x} - (\overline{m}w - \bar{n}v), \\
\overline{Y}_e &= -e\bar{v} + \left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial y} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial y}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial y} - (\bar{n}u - \bar{l}w), \\
\overline{Z}_e &= -e\bar{w} + \left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial z} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial z} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial z}\right) \\
&\qquad + \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial z} - (\bar{l}v - \overline{m}u).
\end{aligned}
$$

Chaque terme dans l'expression de cette force affecte la forme d'un produit de deux facteurs. Dans chaque produit l'un des facteurs, $e, \frac{\partial u_e}{\partial x}, \frac{\partial v_e}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial u_e}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial k}{\partial x}, \ldots, \bar{l}, \overline{m}, \bar{n}$, représente un état ou une propriété intrinsèque de l'élément de volume qui subit la force. Ce facteur est identiquement nul dans le fluide fondamental. Il en résulte que ce sont les corps seulement qui sont soumis à l'action de la force (A). L'autre facteur dépend du champ, représenté soit par l'intensité de champ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$, soit par la vitesse actuelle u, v, w. Mais le champ dépend de son côté de certaines particularités caractéristiques du mouvement des différents éléments de volume des corps, comme le montre le théorème fondamental (18). La force (A) apparaît donc comme une action à distance, que subit chaque élément d'un corps de la part de tous les autres éléments de ce corps et de tous les éléments des corps distants.

Il se manifeste donc, dans notre système hydrodynamique, entre les divers éléments des corps, des forces qui ont le même caractère d'actions apparentes à distance que les forces pondéromotrices dans un système électrique ou magnétique.

26. Avant d'aller plus loin, rappelons nous ce que nous savons, et ce que nous ignorons, concernant les forces pondéromotrices dans les champs électriques ou magnétiques.

Nos expériences directes se rapportent aux *forces résultantes s'appliquant à des corps de dimensions finies.* Ces forces résultent d'une distribution de forces élémentaires, qui s'appliquent aux différentes éléments de volume des corps. Mais la connaissance de la force résultante ne suffit pas pour déterminer uniformément ces forces élémentaires.

On a essayé, il est vrai, de définir, par des voies indirectes, le système des forces élémentaires dans les champs électriques et magnétiques. On a même essayé d'aller encore plus loin, de déterminer les pressions à l'intérieur des champs, pressions dans lesquelles on cherche, d'après FARADAY et MAXWELL, la cause de ces forces. Mais on a le droit de se demander, si ces développements sont à l'abri de tout reproche. Une discussion de ces développements, faite en s'éclairant à la lumière de l'analogie hydrodynamique qui nous occupe ici, présenterait certainement un grand intérêt. Mais bornons nous ici à formuler les conclusions qu'on peut tirer, avec une sûreté absolue, relativement à l'analogie des phénomènes électriques ou magnétiques et des phénomènes hydrodynamiques. Autrement dit, bornons nous à considérer, dans le cas hydrodynamique comme dans le cas électrique ou magnétique, la force résultante appliquée à un corps de dimensions finies, c'est à dire la force dont les composantes sont

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} X &= \int \overline{X}_e d\tau, \\ Y &= \int \overline{Y}_e d\tau, \\ Z &= \int \overline{Z}_e d\tau, \end{aligned}$$

les intégrales étant étendues à un corps de dimensions finies.

27. En substituant les expressions (25, A) dans (26, a), on obtient les expressions de X, Y et Z, qui sont respectivement les sommes de quatre intégrales, correspondant aux quatre parties principales des formules (25, A). Ecrivons les intégrales qui se rapportent à la composante X. Nous aurons

$$\text{(a)} \qquad X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

ou

$$
\text{(b)}\qquad
\begin{aligned}
X_1 &= -\int e\bar{u}\,d\tau,\\
X_2 &= \int\left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x}\right)d\tau,\\
X_3 &= \int\frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial x}\,d\tau,\\
X_4 &= -\int(\bar{m}w - \bar{n}v)\,d\tau.
\end{aligned}
$$

Toutes ces intégrales sont bien connues dans la théorie de l'électricité ou du magnétisme. Elles représentent la composante X de la force résultante agissant sur un corps, composante qui ressort de quatre causes différentes, X_1 due à la distribution d'électricité ou de magnétisme vrai e, X_2 due aux polarisations intrinsèques u_e, v_e, w_e, X_3 due à l'hétérogénéité (forces dépendant de l'influence électrique ou du magnétisme induit) et enfin X_4 due à la distribution des courants électriques $\bar{l}$, $\bar{m}$, $\bar{n}$ ou du courant magnétique $-\bar{l}$, $-\bar{m}$; $-\bar{n}$. Seulement, chaque intégrale est affectée d'un signe contraire à celui avec lequel elle apparait dans l'électricité ou le magnétisme.

Il faut donc en conclure que les forces résultantes qui apparaissent dans le champ hydrodynamique sont toujours égales, mais de signe opposée, aux forces résultantes qui s'appliquent aux corps dans le champ électrique ou magnétique.

28. On peut faire remarquer que les intégrales (27, b) ne représentent pas sous la forme la plus ordinaire les forces agissant dans le champ électrique ou magnétique. Montrons donc, pour plus d'évidence, la transformation des intégrales (27, b) suivant la forme employée le plus souvant pour calculer ces forces. Cette transformation repose sur l'introduction de la divergence $\bar{e}$ (11, a) de l'intensité de champ comme quantité auxiliaire. C'est la quantité qu'on appelle, dans le cas de l'électricité ou du magnétisme, la *densité libre* d'électricité ou de magnétisme, pour la distinguer de *la densité vraie* e, qui est le quantité fondamental, proprement dite, au point de vue physique.

Remarquons que, k_0 étant constant, on peut écrire la troisième intégrale (27, b) sous la forme

$$X_3 = \int \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial(k-k_0)}{\partial x}d\tau.$$

Si l'on effectue maintenant une transformation par parties dans tout le volume du corps, l'intégrale de surface disparaîtra, par ce qu'à la surface $k-k_0$ est égale à zéro. Il vient donc

$$X_3 = -\int (k-k_0)\left\{\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right\}d\tau.$$

De même on obtient en transformant par parties l'intégrale X_2

$$X_2 = -\int \left\{u_e\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v_e\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + w_e\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right\}d\tau.$$

En faisant la somme des intégrales X_2 et X_3 et tenant compte des équations de connection (20, A) on trouve

$$X_2 + X_3 = -\int \left\{(u-k_0\bar{u})\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + (v-k_0\bar{v})\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + (w-k_0\bar{w})\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right\}d\tau$$

ce qu'on peut ensuite écrire, en tenant compte de (20, B)

$$\text{(a)}\quad X_2 + X_3 = -\int \left\{(u-k_0\bar{u})\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + (v-k_0\bar{v})\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + (w-k_0\bar{w})\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right\}d\tau$$
$$-\int \{(v-k_0\bar{v})\bar{n} - (w-k_0\bar{w})\bar{m}\}d\tau.$$

Transformons par parties la première de ces deux intégrales. L'intégrale de surface disparaîtra par ce qu'à la surface $u-k_0\bar{u}=v-k_0\bar{v}=w-k_0\bar{w}=0$. Il reste donc seulement l'intégrale de volume. Cette intégrale se sépare en deux, dont l'une contient la divergence e de la vitesse actuelle (20, C) et l'autre la divergence $\bar{e}$ de l'intensité de champ (12, a). La première de ces intégrales est simplement $-X_1$. De même on peut séparer de la seconde intégral (a) l'intégrale $-X_4$. Il vient donc

$$X_2 + X_3 = -X_1 - X_4 - k_0\int \bar{e}\bar{u}\,d\tau - k_0\int(\bar{m}\bar{w} - \bar{l}\bar{v})\,d\tau$$

d'où l'on déduit immédiatement la valeur de X. Les valeurs de Y et Z s'en déduisent par symétrie. On arrive ainsi enfin à l'expression suivante des composantes de la force résultante appliquée à un corps

$$
\text{(b)} \qquad
\begin{aligned}
X &= -k_0\int \bar{e}\bar{u}\,d\tau - k_0\int(\bar{m}\bar{w} - \bar{n}\bar{v})\,d\tau,\\
Y &= -k_0\int \bar{e}\bar{v}\,d\tau - k_0\int(\bar{n}\bar{u} - \bar{l}\bar{w})\,d\tau,\\
Z &= -k_0\int \bar{e}\bar{w}\,d\tau - k_0\int(\bar{l}\bar{v} - \bar{m}\bar{u})\,d\tau.
\end{aligned}
$$

En cas de discontinuité ces intégrales de volume contiennent implicitement des intégrales de surface où figurent les divergences de surface $\bar{e}$ et les tourbillons de surface $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$.

Ce sont bien là les formules à l'aide desquelles on représente le plus souvant la force appliquée à un corps dans le champ électromagnétique, abstraction faite seulement des signes négatifs des seconds membres. La force se compose de deux parties, une première qui est analogue à la force vers la distribution du magnétisme libre $\bar{e}$, et une seconde qui est analogue à la force vers la distribution du courant électrique $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$, les corps se trouvant dans un milieu ayant la perméabilité magnétique k_0.

Nous avons donc bien démontré que ces forces résultantes, qui agissent sur les corps dans le champ hydrodynamique, sont, au signe près, identiques aux forces pondéromotrices résultantes qui agissent sur les corps dans le champ électromagnétique.

VIII. *Actions à distance.*

29. L'analogie que nous venons de découvrir nous montre bien nettement que les forces hydrodynamiques ont le même caractère d'actions réciproques à distance qu'ont les forces pondéromotrices dans le champ électromagnétique. Mettons aussi ce résultat explicitement en évidence, en donnant aux formules, qui expriment les forces, l'apparence extérieur qui correspond à des forces à distance.

Pour y arriver, remarquons que les formules (28, b) expriment la force résultante à l'aide de l'intensité de champ $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ en connection avec la divergence $\bar{e}$ et la rotation $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ de ce même vecteur. On peut également exprimer le vecteur lui-même à l'aide de ces divergences et rotations. C'est en introduisant ces expressions du vecteur $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ dans les formules (28, b) qu'on arrive aux formules qui donnent aux forces l'apparence extérieur de forces à distance.

30. Reprenons donc l'expression d'un vecteur à l'aide de ses divergences et de ses rotations. D'abord on peut toujours exprimer un vecteur $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ à l'aide d'un potentiel scalaire et d'un potentiel vecteur en écrivant

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} \bar{u} &= \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{N}}{\partial y}, \\ \bar{v} &= \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{N}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{L}}{\partial z}, \\ \bar{w} &= \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{L}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{M}}{\partial x}. \end{aligned}$$

Ensuite on peut, s'il s'agit d'un espace infini, calculer $\bar{\varphi}$, $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$ à l'aide des quadratures

$$\text{(b)} \qquad \begin{aligned} \bar{\varphi} &= -\int \frac{\bar{e}_1}{4\pi r} d\tau_1, \\ \bar{L} &= -\int \frac{\bar{l}_1}{4\pi r} d\tau_1, \\ \bar{M} &= -\int \frac{\bar{m}_1}{4\pi r} d\tau_1, \\ \bar{N} &= -\int \frac{\bar{n}_1}{4\pi r} d\tau_1. \end{aligned}$$

Dans ce cas l'indice 1 signifie que les quantités $\bar{e}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ sont données en fonction des coordonnées x_1, y_1, z_1, qui servent de lettres d'intégration. r est la distance du point x_1, y_1, z_1, mobile pendant l'intégration, au point x, y, z, où l'on cherche la valeur des quantités $\varphi, \bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$. Les intégrations s'étendent à toutes les régions de l'espace où existent les quantités $\bar{e}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$. L'intégration effective s'étend donc au volume des corps seulement. Mais, ces quantités étant identiquement nulles dans le fluide fondamental, on peut considérer les intégrations comme étendues à l'espace entier.

31. Substitutions (30, a) dans (28, b). La composante X s'écrit

$$\text{(a)} \qquad X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

où

(b)
$$
\begin{aligned}
X_1 &= -k_0 \int \bar{e} \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\tau, \\
X_2 &= -k_0 \int \bar{e} \left(\frac{\partial \overline{M}}{\partial z} - \frac{\partial \overline{N}}{\partial y} \right) d\tau, \\
X_3 &= -k_0 \int \left\{ \overline{m} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \bar{n} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\} d\tau, \\
X_4 &= -k_0 \int \left\{ \overline{m} \left(\frac{\partial \overline{L}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{M}}{\partial x} \right) - \bar{n} \left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{L}}{\partial z} \right) \right\} d\tau.
\end{aligned}
$$

x, y, z sont les lettres d'intégration, et l'intégration s'effectuee dans le volume du corps vers lequel s'exerce la force résultante que l'on cherche à déterminer.

Avant d'effectuer la substitution des valeurs de $\varphi, \overline{L}, \overline{M}, \overline{N}$, transformons la dernière des quatre intégrales. L'addition et la soustraction du terme $\bar{l} \frac{\partial \overline{L}}{\partial x}$ nous permet d'écrire X sous la forme

$$
X_4 = k_0 \int \left(\bar{l} \frac{\partial \overline{L}}{\partial x} + \overline{m} \frac{\partial \overline{M}}{\partial x} + \bar{n} \frac{\partial \overline{N}}{\partial x} \right) d\tau - k_0 \int \left(\bar{l} \frac{\partial \overline{L}}{\partial x} + \overline{m} \frac{\partial \overline{L}}{\partial y} + \bar{n} \frac{\partial \overline{L}}{\partial z} \right) d\tau.
$$

Or, la dernière de ces deux intégrales disparaît. Car, si nous intégrons par parties dans tout le volume du corps, nous avons une intégrale de surface qui contient les valeurs de $\bar{l}, \overline{m}, \bar{n}$ à la surface, et une intégral de volume qui contient la divergence

$$
\frac{\partial \bar{l}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{m}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{n}}{\partial z}
$$

du tourbillon $\bar{l}, \overline{m}, \bar{n}$. Or ces deux intégrales disparaissent, parce qu'à la surface du corps le tourbillon est nul (15), et parce que la divergence d'un tourbillon est toujours identiquement nulle, comme on le voit de suite en formant la divergence des expressions (20, B). L'expression de X_4 s'écrit donc simplement

(b')
$$
X_4 = k_0 \int \left(\bar{l} \frac{\partial \overline{L}}{\partial x} + \overline{m} \frac{\partial \overline{M}}{\partial x} + \bar{n} \frac{\partial \overline{N}}{\partial x} \right) d\tau.
$$

En substituant maintenant d'après (30, b) les valeurs de $\bar{\varphi}$, $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$ on peut effectuer sous le second signe somme les différentiations par rapport aux variables x, y, z. Il vient donc

$$
\text{(c)} \qquad
\begin{aligned}
X_1 &= \quad k_0 \iint \bar{e}\bar{e}_1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{4\pi r}\, d\tau d\tau_1 , \\
X_2 &= \quad k_0 \iint \bar{e}\left(\bar{m}_1 \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{4\pi r} - \bar{n}_1 \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{4\pi r}\right) d\tau d\tau_1 , \\
X_3 &= \quad k_0 \iint \bar{e}_1 \left(\bar{m} \frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{4\pi r} - \bar{n} \frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{4\pi r}\right) d\tau d\tau_1 , \\
X_4 &= -k_0 \iint (\bar{l}\,\bar{l}_1 + \bar{m}\bar{m}_1 + \bar{n}\bar{n}_1) \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{4\pi r}\, d\tau d\tau_1 .
\end{aligned}
$$

On en déduit par symétrie des expressions analogues relatives aux axes y et z.

32. Ces formules donnent bien à la force considerée l'apparence d'une force à distance, se composant de quatre forces partielles.

La première de ces forces partielles parait provenir d'une force agissant entre les masses magnétoïdiques libres $\bar{e}d\tau$ et $\bar{e}_1 d\tau_1$, que portent les éléments $d\tau$ et $d\tau_1$. Elle agit conformément à la loi de COULOMB, mais avec inversion de signe, les masses magnétoïdiques de même signe s'attirant et celles de signes contraires se repoussant.

La seconde force parait provenir d'une action à distance que subirait l'élément $d\tau$ de masse magnétoïdique $ed\tau$ de la part de l'élément $d\tau_1$ siège d'un courant électroïdiques de densité de courant $\bar{l}_1, \bar{m}_1, \bar{n}_1$. Pour mieux se rendre compte de la nature de cette force on peut choisir des éléments de volume particuliers. On peut diviser le corps en tubes infiniment minces engendrés par des lignes de courant électroïdique. On trouve ainsi sans difficulté que chaque élément linéaire ds_1 d'un tel tube agit sur la masse magnétoïdique $\bar{e}d\tau$ suivant la loi de BIOT et SAVART et suivant la règle d'AMPÈRE, mais cette dernière règle étant inversée de signe.

La troisième force représente la force que subit l'élément de volume $d\tau$, siège du courant électroïdique $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$, de la part de l'élément de volume

$d\tau_1$ de masse magnétoïdique $\bar{e}_1 d\tau_1$. C'est la réaction correspondant à l'action envisagée dans le cas précédent.

La quatrième force parait provenir d'une action à distance apparente qui s'éffectuerait entre deux éléments de volume $d\tau$ et $d\tau_1$, sièges de courants électroïdiques de densités respectives $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ et $\bar{l}_1, \bar{m}_1, \bar{n}_1$. En considérant les mêmes éléments de volume spéciaux que ci-dessus, on déduit facilement que deux filets de courant agissent l'un sur l'autre suivant la force qu'on deduit du potentiel de NEUMANN, mais avec inversion de signe.

IX. *Analogie analytique et analogie physique.*

33. Ainsi que nous l'avons trouvé, le mouvement de notre système hydrodynamique s'effectue conformément à des formules qui sont en même temps les formules fondamentales de l'électromagnétisme stationnaire. Au point de vue analytique l'analogie est complète, abstraction faite de l'inversion de signe des formules qui se rapportent aux forces pondéromotrices.

Mais bien que l'analogie analytique soit à tel point complète, un observateur qui regarde des mouvement fluides ne découvrira guère la moindre trace de cette analogie. Elle se dissimule par suite de diverses causes. D'abord le système hydrodynamique est un système en mouvement, tandis que le système électromagnétique est, au moins extérieurement, un système en repos. En général le système hydrodynamique change incessament de configuration, et l'analogie avec un système électromagnétique déterminé ne subsiste que pendant un instant, l'instant pendant lequel le système mobile passe par la configuration que possède constamment l'autre système. L'instant d'après le système hydrodynamique sera à comparer à un autre système électromagnétique, et ainsi de suite.

Il faudra donc que l'observateur se borne à faire ses observations au moment où existe l'analogie avec un système électromagnétique déterminé. Et pour pouvoir découvrir l'analogie qui existe pendant cet instant, il faudrait encore que l'observateur sût décomposer le mouvement actuel, qu'il observe, en deux mouvements partiels, et c'est là une opération qui s'éffectuera en général plus facilement dans les calculs mathématiques que dans les observations physiques.

Il n'y a donc rien d'étonnant à ce que l'on n'ait pas depuis longtemps découvert cette analogie, uniquement en observant les mouvements des fluides.

34. La première condition, qui doit être satisfaite pour que l'analogie puisse ressortir visiblement aux yeux, est donc celle-ci, que le mouvement du système fluide soit d'une telle nature spéciale qu'il ne soit pas accompagné de changement de configuration essentielle. Nous verrons que cette condition nécessaire sera aussi suffisante pour que l'analogie puisse ressortir comme une réalite physique, apparente aux yeux.

Il existe deux formes de mouvements qui ne sont pas accompagnés de changements de configuration visibles. La première est celle du mouvement permanent. Dans ce cas l'invariabilité extérieure du système est assurée par la condition que le volume qu'occupe une masse quelconque du fluide sera, pendant le mouvement, toujours remplacé par une masse absolument semblable, possédant absolument le même mouvement. Un tel mouvement ne changera évidemment ni la forme extérieure des corps, ni les positions de ces corps dans l'espace.

La seconde forme est celle d'un mouvement vibratoire, qui se limite à des amplitudes très petites autour d'une configuration invariable. Dans ce cas la condition de la configuration invariable n'est remplie que d'une manière approximative. Mais l'approximation est d'autant plus grande qu'on choisit des amplitudes plus petites. On peut donc réaliser ainsi facilement dans la pratique le cas où la constatation des changements de configuration échappe à un observateur doué de sens grossiers.

35. Mais il y a une remarque importante à faire relativement à ce passage de l'analogie analytique à une analogie physique concrète. Déjà l'analogie analytique est de nature restreinte. Les formules hydrodynamiques que nous venons de développer correspondent à celles de l'électrodynamique stationnaire seulement, et non pas à celles de l'électrodynamique la plus générale. Si maintenant on passe de l'analogie analytique à une analogie physique, en introduisant l'une ou l'autre des hypothèses mentionnées ci-dessus, le domaine de l'analogie se restreint encore d'avantage. Et ce domaine se restreint de deux manières différentes suivant la nature du mouvement spécialisé.

Dans le cas du mouvement permanent on arrive à une analogie qui ressortit des traveaux de v. HELMHOLTZ et de LORD KELVIN. Dans le cas du mouvement vibratoire on arrive à l'analogie qu'a trouvée C. A. BJERKNES pour le cas de corps sphériques, mais que nous allons démontrer ainsi d'une manière générale.

X. *État de mouvement permanent. Analogies de v. Helmholtz et de Lord Kelvin.*

36. Dans le régime permanent les corps paraîtront limités par des surfaces géométriques fixes dans l'éspace. Le mouvement du fluide extérieur sera donc complètement indépendant du mouvement que possède le fluide à l'intérieur des corps. Quelles que soient les hypothèses que l'on fasse relativement aux corps, le mouvement dans l'espace extérieur sera le mouvement irrotationnel d'un fluide homogène et incompressible, compris entre des surfaces limites fixes. Or on sait que ce mouvement ne peut exister qu'à la condition que l'espace soit à connections multiples. Il faut donc qu'un ou plusieurs des corps soient percés de canaux, à travers desquels le fluide peut circuler: c'est le mouvement de circulation à potentiel non uniforme, dont les propriétés sont bien connues. Les corps qui ne sont pas percés de canaux ne forment que des obstacles aux courants, qui existent, grâce aux canaux dans les autres corps. Partout les lignes de courant s'infléchissent tangentiellement aux surfaces des corps.

37. La constitution et le mouvement intérieur des corps étant indifférent vis-à-vis du mouvement du fluide fondamental, supposons d'abord un cas limite très simple. Supposons que les corps ont une densité infinie, et par conséquent un volume spécifique nul. Dans le cas magnétique correspondant les corps auront donc une perméabilité magnétique nulle: c'est le cas idéal d'une diamagnétisme extrème.

Poursuivons l'analogie dans ce cas idéal. Dans les corps infiniment diamagnétiques il peut exister une intensité de champ finie. Mais la perméabilité magnétique étant nulle, une induction nulle correspondra à l'intensité de champ finie. De même, dans les corps infiniment lourds il peut exister une intensité de champ, c'est à dire une quantité de mouvement,

finie. Mais la vitesse qui y correspond est nulle. On peut donc donner à ces corps une distribution intérieure quelconque de l'intensité de champ. La condition de leur immobilité dans l'espace reste remplie, sans qu'il soit nécessaire de spécialiser la distribution de cette intensité de champ, ou bien d'introduire une vitesse d'énergie produite par des forces extérieures.

On peut donc se donner une distribution de l'intensité de champ qui correspond à une distribution quelconque des tourbillons dynamiques. Ou bien, on peut se donner dans les corps infiniment lourds une distribution quelconque de tourbillons dynamiques, et dans les corps infiniment diamagnétiques une distribution quelconque de courants électriques. Ces deux systèmes sont donc analogues entre eux dans le sens que nous avons développé. Au point de vue géométrique il y a une identité complète entre les champs des deux systèmes. Et à cette analogie géométrique directe s'ajoute l'analogie dynamique inverse. Il s'exerce dans le champ hydrodynamique entre les corps infiniment lourds des forces apparentes à distance, qui sont au signe près identiques aux forces qui agissent entre les corps infiniment diamagnétiques dans le champ électromagnétique. Ainsi les corps infiniment lourds dans le système hydrodynamique agissent les uns sur les autres à l'inverse des corps infiniment diamagnétiques qui sont le siège d'un système quelconque de courants électriques.

Dans des corps infiniment diamagnétiques qui sont percés d'un nombre suffisant de canaux d'une forme convenable, on peut distribuer des courants électriques de manière à obtenir dans l'espace extérieur un champ magnétostatique quelconque. En ce qui concerne ses actions extérieures ce corps peut donc représenter un aimant permanent quelconque, mais avec cette particularité que cet aimant serait construit en une matière infiniment diamagnétique. L'effet visible extérieur du diamagnétisme diminuera indéfiniment si l'espace occupé par les pores devient infiniment grand comparé à l'espace occupé par la matière du corps. Dans ce sens nos corps poreux infiniment lourds donnent l'image hydrodynamique des aimants permanents.

Ajoutons enfin qu'aux corps fluides infiniments lourds et immobiles nous pouvons, sans changer en rien l'effet extérieur, substituer des corps rigides immobiles. Nous retombons donc sur le résultat suivant:

Si dans un fluide homogène et incompressible il se trouve des corps poreux, immobiles dans l'espace, et si à travers les pores de ces corps le fluide exécute le mouvement de circulation irrotationnelle, ces corps poreux

agiront les uns sur les autres comme des aimants permanents dont l'action apparente à distance serait changée de signe.

La première idée d'une analogie de ce genre est due à EULER, qui n'a pas soupconné pourtant la nature inverse de la force à distance.[1] L'énoncé précis et la démonstration rigoureuse sont dus à LORD KELVIN.[2]

38. Les développements de LORD KELVIN s'appuyaient sur l'analogie géométrique qu'avait énoncée v. HELMHOLTZ dans son mémoire célèbre sur les mouvements tourbillonnaires. Montrons la connection de l'analogie que nous avons développée ici avec celle de v. HELMHOLTZ.

Pour y arriver remarquons qu'au lieu de considérer des corps infiniment lourds, nous pouvons considérer des corps d'une densité quelconque. Mais pour assurer leur immobilité dans l'éspace il faut ou bien ajouter la vitesse d'énergie nécessaire, ou bien se donner une distribution de tourbillons tout à fait particulière. Dans le cas de l'électromagnétisme cela veut dire que si l'on donne aux corps des perméabilités magnétiques quelconques, il faut par des polarisations magnétiques intrinsèques particulières, ou par des distributions particulières de courants électriques, s'arranger pour que le champ extérieur reste le même que dans le cas de corps infiniment diamagnétiques. Ces magnétisations ou ces courants ont donc pour but de donner aux corps l'aspect extérieur de corps infiniment diamagnétiques.

Cela étant, supposons que le fluide qui constitue les corps ait la même densité que le fluide extérieur. Supposons la vitesse d'énergie nulle et supposons donnée une distribution de tourbillons dynamiques, assujettie à la condition de laisser les corps stationnaires dans l'espace. Nous retombons donc au cas des équations (12, c), et l'analogie se transfère immédiatement de l'intensité de champ et du tourbillon dynamique à la vitesse actuelle et au tourbillon cinématique. On peut donc, dans ce cas, comparer aussi la vitesse actuelle à l'intensité de champ magnétique, et le tourbillon cinématique au courant électrique: c'est la comparaison de v. HELMHOLTZ.

Mais v. HELMHOLTZ énonce son résultat sous une forme moins spécialisée. Car pour lui la distribution de tourbillons est quelconque, et il n'est pas

[1] EULER, *Lettres à une princesse d'Allemagne*, T. III, lettres CLXXVI—CLXXVIII.

[2] Sir W. THOMSON, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Feb. 1870: *Papers on Electrostatics and Magnetism*, London 1872, p. 567—571.

Philosophical Magazine, 4:th. Series, T. 45, p. 337—38. 1873.

nécessaire que les masses fluides, possédant le mouvement tourbillonnaire, forment des corps stationaires dans l'éspace. Ces corps peuvent avoir des mouvements quelconques. Mais on ne gagne cette généralisation de l'analogie géométrique qu'aux dépens de l'analogie dynamique qui disparaît totalement. Ce fait est mis en pleine évidence par les exemples qu'on calcule ordinairement dans les cours d'hydrodynamique. On trouve par exemple que deux filets de tourbillons de même intensité exécutent un mouvement de rotation l'un autour de l'autre, s'ils sont de même signe, et un mouvement de translation l'un auprès de l'autre s'ils sont de signes contraires. Mais on ne trouve pas la moindre trace d'une attraction ou une répulsion entre les filets comme entre des courants électriques parallèles. Du moment, au contraire, qu'on introduit la condition que les filets de tourbillons garderont leur situation dans l'espace, on trouvera une répulsion en cas de rotations de même sens, et une attraction en cas de rotations de sens contraire. Ce résultat peut être vérifié expérimentellement à l'aide de corps solides cylindriques auxquels on donne un mouvement de rotation dans l'eau.

Comme le prouve ce cas particulier, et comme le montrent les développements de Lord Kelvin, ainsi que les développements tout différents que nous venons de donner ici, c'est seulement dans le cas des tourbillons stationnaire dans l'espace que s'approfondit l'analogie de v. Helmholtz, en s'étendant aux forces apparentes à distance entre les tourbillons.

XI. *État de mouvements vibratoires. Analogie de C. A. Bjerknes.*

39. Considérons maintenant l'état de mouvement vibratoire. Dans un tel mouvement, le tourbillon dynamique, s'il existe, doit être aussi nécessairement vibratoire, et par conséquent fonction du temps. Mais nous avons démontré que la valeur de ce tourbillon est indépendante du temps (12). Pour éviter cette contradiction il faut donc nécessairement supposer que ce tourbillon est partout identiquement nul

$$\bar{l} = \bar{m} = \bar{n} = 0.$$

C'est par cette condition que se restreint le domaine de l'analogie physique dans le cas des mouvements vibratoires.

Dans ce cas les équations (20, A—D), qui démontrent l'analogi géométrique, se réduisent à

$$\text{(A)}\qquad \begin{aligned} u &= k\bar{u} + u_e, \\ v &= k\bar{v} + v_e, \\ w &= k\bar{w} + w_e, \end{aligned}$$

$$\text{(B)}\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = 0, \\ &\frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = 0, \end{aligned}$$

$$\text{(C)}\qquad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = e$$

jointes aux conditions que dans le fluide fondamental on a

$$\text{(D)}\qquad \begin{aligned} u_e &= 0, \qquad & e &= 0, \\ v_e &= 0, \qquad & k &= k_0. \\ w_e &= 0, \end{aligned}$$

De même les équations (25, A), qui démontrent l'analogie dynamique inverse, se réduisent à

$$\text{(E)}\qquad \begin{aligned} \bar{X}_e &= -e\bar{u} + \left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial x}, \\ \bar{Y}_e &= -e\bar{v} + \left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial y} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial y}, \\ \bar{Z}_e &= -e\bar{w} + \left(\bar{u}\frac{\partial u_e}{\partial z} + \bar{v}\frac{\partial v_e}{\partial z} + \bar{w}\frac{\partial w_e}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}(\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2)\frac{\partial k}{\partial z}. \end{aligned}$$

Ces équations sont satisfaites à chaque instant pendant le mouvement. Il faut en déduire ce que constatera un observateur, ayant des sens trop grossiers pour voir les petites oscillations, mais observant seulement ce qui en résulte en moyenne.

40. Soit $f(t)$ une fonction périodique du temps de période τ,

$$f(t+\tau) = f(t). \tag{a}$$

La fonction doit avoir des valeurs toujours finies, mais la période τ doit être une petite quantité du premier ordre. Je suppose de plus que cette fonction périodique ait pour une période une valeur moyenne linéaire nulle, et une valeur moyenne quadratique égale à 1,

$$\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} f(t)\,dt = 0, \tag{b}$$

$$\frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} [f(t)]^2 dt = 1. \tag{c}$$

Évidemment ces conditions ne restreignent pas essentiellement la forme de la fonction $f(t)$. Citons comme un exemple d'une fonction qui jouit de ces propriétés

$$f(t) = \sqrt{2}\sin 2\pi\left(\frac{t}{\tau} + \alpha\right). \tag{d}$$

Des hypothèses faites il résulte que nous pouvons toujours écrire

$$\int_t^{t'} f(t)\,dt = \varepsilon \tag{e}$$

t' étant un temps quelconque et ε une petite quantité du premier ordre.

41. Remarquons maintenant que la vitesse d'expansion jointe à la vitesse d'énergie suffisent pour déterminer uniformément le champ de mouvement (18). Supposons donc ces quantités données comme des fonctions périodiques du temps par les équations

$$\begin{aligned} e &= e_m\ f(t), \\ u_e &= u_{e,m} f(t), \\ v_e &= v_{e,m} f(t), \\ w_e &= w_{e,m} f(t). \end{aligned} \tag{a}$$

Ici e_m, $u_{e,m}$, $v_{e,m}$, $w_{e,m}$ sont des quantités indépendantes du temps qui don-

nent des mesures convenables de l'intensité moyenne des mouvements vibratoires considérés. Car en vertu de (40, c) nous avons par exemple

$$e_m^2 = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} e^2 d\tau.$$

Remarquons en outre que les quantités $e_m, u_{e,m}, v_{e,m}, w_{e,m}$ ont les unes par rapport aux autres les mêmes signes qu'ont à une époque quelconque les quantités dépendantes du temps e, u_e, v_e, w_e. D'autre part, en vertu de la propriété (40, e), les déplacements qui résultent des vitesses u_e, v_e, w_e, ou les changements de volume qui résultent de la vitesse d'expansion e, seront toujours des petites quantités du premier ordre. Il en résulte comme un corollaire, qu'à une petite quantité du premier ordre près on peut considérer le volume spécifique k d'une particule quelconque du fluide comme constante.

Cela étant on voit de suite qu'à des petites quantités du premier ordre près on peut satisfaire aux équations (39, A—D) en écrivant

$$\text{(b)}\qquad \begin{aligned} u &= u_m f(t), & \bar{u} &= \bar{u}_m f(t), \\ v &= v_m f(t), & \bar{v} &= \bar{v}_m f(t), \\ w &= w_m f(t), & \bar{w} &= \bar{w}_m f(t). \end{aligned}$$

Car la substitution de (a) et (b) en (39, A—C) donne

$$\text{(A)}\qquad \begin{aligned} u_m &= k\bar{u}_m + u_{e,m}, \\ v_m &= k\bar{v}_m + v_{e,m}, \\ w_m &= k\bar{w}_m + w_{e,m}, \end{aligned}$$

$$\text{(B)}\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \bar{w}_m}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}_m}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}_m}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \bar{v}_m}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_m}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{(C)}\qquad \frac{\partial u_m}{\partial x} + \frac{\partial v_m}{\partial y} + \frac{\partial w_m}{\partial z} = e_m$$

relations auxquelles il faut joindre les conditions qui proviennent de la substitution en (39, D), savoir

$$\text{(D)}\qquad \begin{aligned} u_{e,m} &= 0, & e_m &= 0, \\ v_{e,m} &= 0, & k &= k_0. \\ w_{e,m} &= 0, \end{aligned}$$

Si les quantités indépendantes du temps $u_m, v_m, w_m, \bar{u}_m, \bar{v}_m, \bar{w}_m, u_{e,m}, v_{e,m}, w_{e,m}, e_m, k$, satisfont aux équations (A—D), les formules (b) donnent la solution cherchée, qui est déterminée uniformément par les quantités données (a).

Dans ce champ de mouvement vibratoire s'exercent des forces $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$, dont les valeurs momentanées sont données par les formules (39, E). Calculons les valeurs moyennes. Pour la composante X cette valeur sera

$$\overline{X}_{e,m} = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} X d\tau.$$

En utilisant la propriété (40, c) de la fonction $f(t)$, nous trouvons donc sans difficulté

$$\text{(E)}\qquad \begin{aligned} \overline{X}_m &= -e_m\bar{u}_m + \left(\bar{u}_m\frac{\partial u_{e,m}}{\partial x} + \bar{v}_m\frac{\partial v_{e,m}}{\partial x} + \bar{w}_m\frac{\partial w_{e,m}}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}(\bar{u}_m^2 + \bar{v}_m^2 + \bar{w}_m^2)\frac{\partial k}{\partial x}, \\ \overline{Y}_m &= -e_m\bar{v}_m + \left(\bar{u}_m\frac{\partial u_{e,m}}{\partial y} + \bar{v}_m\frac{\partial v_{e,m}}{\partial y} + \bar{w}_m\frac{\partial w_{e,m}}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}(\bar{u}_m^2 + \bar{v}_m^2 + \bar{w}_m^2)\frac{\partial k}{\partial y}, \\ \overline{Z}_m &= -e_m\bar{w}_m + \left(\bar{u}_m\frac{\partial u_{e,m}}{\partial z} + \bar{v}_m\frac{\partial v_{e,m}}{\partial z} + \bar{w}_m\frac{\partial w_{e,m}}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}(\bar{u}_m^2 + \bar{v}_m^2 + \bar{w}_m^2)\frac{\partial k}{\partial z}. \end{aligned}$$

Comparons maintenant ces équations (A—E) aux équations primaires (39, A—E). On voit qu'elles ont exactement la même forme. Dans le cas des vibrations synchrones il n'est donc pas nécessaire d'écrire des formules différentes pour l'état de mouvement vrai, et pour l'état de mouvement moyen. On arrive aux équations qui décrivent l'état moyen simplement en changeant l'interprétation des symboles qui figurent dans les équations du mouvement vrai: on interprète les quantités $u, v, w, \bar{u}, \bar{v}, \bar{w}, u_e, v_e, w_e, e$ non plus comme les valeurs actuelles, mais comme les moyennes quadratiques des quantités en question, et on considère en même temps k comme indépendant du temps.

42. Quand on a ainsi changé l'interprétation des symboles qui figurent dans les équations (39, A—E), il n'y figure plus que des paramètres indépendants du temps. Pour l'état de mouvement moyen l'analogie aux phénomènes électriques ou magnétiques subsiste donc indépendamment du temps. Dans cette interprétation des symboles, les équations (39, A—E) se distinguent des équations des champs électrostatiques ou magnétiques uniquement par le signe inverse des forces pondéromotrices (39, E). Pour un expérimentateur qui n'observe pas les petits mouvements, mais seulement les forces moyennes que subissent les corps, le système hydrodynamique semblerait donc être un système électrostatique ou magnétique, mais avec cette particularité singulière, que les masses de même nom s'attirent et les masses de nom contraire se repoussent.

Le courant électroïdique étant nul, $\bar{l} = \bar{m} = \bar{n} = 0$, on voit que les formules (28, b) de la force résultante vers un corps se réduisent à

(a)
$$X = -k_0 \int \bar{e}\bar{u}\,d\tau,$$
$$Y = -k_0 \int \bar{e}\bar{v}\,d\tau,$$
$$Z = -k_0 \int \bar{e}\bar{w}\,d\tau,$$

formules dans lesquelles on interprète maintenant $\bar{e}$ comme étant la moyenne quadratique de la quantité $\bar{e}$ primitive. Les formules

(b)
$$X = k_0 \iint \bar{e}\bar{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{4\pi r}\,d\tau d\tau_1,$$
$$Y = k_0 \iint \bar{e}\bar{e}_1 \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{4\pi r}\,d\tau d\tau_1,$$
$$Z = k \iint \bar{e}\bar{e}_1 \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{4\pi r}\,d\tau d\tau_1$$

donnent aux forces l'apparence extérieure de forces à distance entre les masses électroïdiques ou magnétoïdiques libres $\bar{e}d\tau$ et $\bar{e}_1 d\tau_1$. Ce sont, avec le signe changé, les formules qui permettent de calculer toutes les actions à distance de l'électrostatique ou du magnétisme, soit que les masses libres dépendent d'électrisations vraies, de polarisations électriques ou magnétiques intrinsèques, ou enfin du phénomène de l'influence.

Les formules (a) et (b) sont indépendantes de la forme des corps. Elles renferment donc comme des cas particuliers tous les résultats de C. A. BJERKNES relatifs aux actions apparentes à distance entre des corps sphériques qui effectuent des mouvements de vibrations dans un liquide parfait. Remarquons enfin que les expériences, à l'aide desquelles C. A. BJERKNES a vérifié dans une étendue si vaste ses résultats analytiques, réussissent aussi bien avec des corps d'autres formes que la forme sphérique. Les résultats généraux analytiques, que nous venons de développer, sont donc déjà vérifiés dans une étendue considérable par des expériences concrètes.

UNE MÉTHODE GÉOMÉTRIQUE ÉLÉMENTAIRE POUR L'ÉTUDE DE CERTAINES QUESTIONS DE LA THÉORIE DES COURBES PLANES[1]

PAR

HELGE VON KOCH
À STOCKHOLM.

Jusqu'à l'époque où WEIERSTRASS inventa une fonction continue ne possédant, pour aucune valeur de la variable, une dérivée déterminée,[2] c'était une opinion bien répandue dans le monde scientifique que toute courbe continue possède une tangente déterminée (du moins en exceptant certains points singuliers); et l'on sait que, de temps en temps, plusieurs géomètres éminents ont essayé de consolider cette opinion, fondée sans doute sur la représentation graphique des courbes, par des raisonnements logiques.[3]

Bien que l'exemple dû à WEIERSTRASS ait pour toujours corrigé cette erreur, cet exemple ne satisfait pas l'esprit au point de vue géométrique;

[1] Une partie du présent travail est la reproduction d'un article paru dans Arkiv för mathematik, astronomi och fysik (utg. af K. Sv. Vet.-Akademien, Stockholm), Bd. 1, p. 681.

[2] Voir Journ. f. Math., t. 79 (1875).

[3] Parmi ces tentatives nous citerons celles d'AMPÈRE (J. éc. pol. cah. 13) de BERTRAND (Traité de C. diff. et intégr.; t. 1) et de GILBERT (Brux. mém. 8°, t. 23 (1872)). — On trouve des notices historiques et bibliographiques dans l'ouvrage de M. E. PASCAL: Esercisi e note crit. di calcole infinitesimale p. 85—128. Milano 1895. — Voir aussi Encyklopädie der Math. Wiss. II. A. 2, p. 63 et l'ouvrage de M. DINI (traduction LÜROTH-SCHEPP): Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse, p. 88 suiv., p. 205—229.

car la fonction dont il s'agit est définie par une expression analytique qui cache la nature géométrique de la courbe correspondante de sorte qu'on ne voit pas, en se plaçant à ce point de vue, pourquoi la courbe n'a pas de tangente; on dirait plutôt que l'apparence est ici en *contradiction* avec la réalité du fait, établi par WEIERSTRASS d'une manière purement analytique. [1]

C'est pourquoi je me suis demandé — et je crois que cette question est d'importance surtout au point de vue de l'enseignement des principes fondamentaux de l'analyse et de la géométrie — si l'on pouvait trouver une courbe sans tangente où l'apparence géométrique fût *en accord* avec le fait dont il s'agit. La courbe que j'ai trouvée et qui fait l'objet principal de l'étude suivante est définie par une construction géométrique, suffisamment simple, je crois, pour que tout le monde puisse pressentir, déjà par »l'intuition naïve«,[2] l'impossibilité d'une tangente déterminée.

Cette construction n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'une méthode qui peut servir dans l'étude de plusieurs questions concernant les courbes planes. On en trouvera des indications dans les deux derniers paragraphes.

Introduction.

Nous commençons par rappeler quelques notions dont nous aurons besoin dans la suite.

Un ensemble de points C dans un plan s'appelle un arc de *courbe* si on peut lui faire correspondre un segment rectiligne AB de telle manière qu'à tous les points de AB correspondent des points déterminés constituant l'ensemble C.

[1] Parmi les nombreux exemples analogues qui ont été publiés après celui de WEIERSTRASS, il n'y a aucun, à ma connaissance, auquel ne s'applique la même remarque. Un essai de C. WIENER (Journ. f. Math., t. 90, p. 221; Cf. WEIERSTRASS, *Functionenlehre*, p. 100) d'élucider géométriquement la courbe définie par la fonction de WEIERSTRASS ne suffit pas, semble-t-il, pour lever la difficulté dont il s'agit.

[2] J'emprunte cette expression à une conférence de M. Klein sur le caractère mathématique de l'intuition de l'espace (1893).

Considérons un tel ensemble et désignons par $K(X)$ le point de C qui correspond au point X du segment AB. Soit X' un point quelconque de AB, $K(X')$ le point correspondant de C; on dit que la courbe est *continue* au point $K(X)$ si le point $K(X')$ s'approche indéfiniment du point $K(X)$ quand X' tend vers X d'une manière quelconque; si cette condition est vérifiée pour tout point de l'arc considéré, on appelle celui-ci un arc de *courbe continue* ou un *arc continu.*[1]

Soit C un tel arc, $K(X)$ un point de C correspondant au point X de AB; s'il y a sur AB un point X' distinct de X (et distinct de B si X coïncide avec A, distinct de A si X coïncide avec B) tel que le point correspondant $K(X')$ coïncide avec $K(X)$, ce point s'appelle un point *multiple* de la courbe; dans le cas contraire, $K(X)$ s'appelle un point *simple*. Si tous les points de l'arc C sont simples, celui-ci s'appelle un arc continu *simple* ou encore, d'après la terminologie de M. Hilbert, une *courbe de* M. Jordan. Enfin, un tel arc s'appelle *fermé* ou *ouvert* selon que les points $K(A)$ et $K(B)$ coïncident ou non.

Considérons un tel arc ouvert C. Soient X_1, X_2 deux points du segment AB et désignons par x_1, x_2 leurs distances respectives du point A. On dit que le point $K(X_1)$ de C *précède* ou *succède* le point $K(X_2)$ selon que $x_1 < x_2$ ou $x_1 > x_2$. Si l'on prend sur AB trois points X_1, X_2, X_3 on dit que le point $K(X_2)$ de la courbe est *intermédiaire* aux points $K(X_1)$, $K(X_3)$ ou que ce point est situé *entre* les deux autres, si le point X_2 est situé entre les points X_1, X_3. Les points $K(A)$, $K(B)$ de la courbe qui correspondent aux extrémités du segment AB s'appellent les *extrémités* de l'arc considéré. Si l'on fait parcourir à X le segment AB dans le sens convenu comme positif, on dit que le point correspondant K parcourt l'arc de courbe C dans le sens positif.

Si l'on joint deux points K, K' de la courbe par une droite, celle-ci s'appelle une *sécante* de la courbe et la partie de cette sécante comprise entre K et K' s'appelle une *corde* de la courbe.

Fixons le point K et faisons tendre K' d'une manière quelconque vers K; si la sécante KK' tend alors vers une direction limite T bien déterminée,

[1] Analytiquement, la dernière condition revient à supposer les coordonnées cartésiennes u, v d'un point de la courbe exprimables en fonctions continues par rapport à un paramètre.

on dit que la courbe a en K une tangente et la droite T s'appelle *la tangente* de C au point K;[1] dans le cas contraire on dit que la courbe n'a pas au point K une tangente déterminée ou, d'une manière plus brève, que la courbe est *sans tangente* en K.

Supposons que la courbe considérée ait au point K une tangente déterminée T. Soient L et M deux points voisins sur la courbe tels que K se trouve *entre* L et M. Alors la sécante LM tend nécessairement vers T comme position limite quand L et M tendent vers K tout en restant sur la courbe à des côtés opposés par rapport à K.[2]

Rappelons enfin la définition de la *longueur* d'un arc de courbe KK'. Intercalons sur cet arc, entre K et K', un certain nombre de points K_1, $K_2, \ldots, K_n$ et considérons la ligne polygonale formée par les cordes KK_1, $K_1K_2, \ldots, K_nK'$. Faisons augmenter indéfiniment le nombre de ces points intermédiaires de telle manière que la longueur de chacune de ces cordes tende vers zéro. Si la longueur de la ligne polygonale ainsi définie tend vers une valeur finie et déterminée L, on dit que l'arc de courbe KK' est *rectifiable* et a pour *longueur* L.

Dans le cas contraire on dit que l'arc n'est pas rectifiable. On prouve dans ce cas que la longueur de la ligne polygonale tend vers l'infini, et l'on convient de dire que la longueur de l'arc est infinie.

I.

Définition de la courbe P et de la fonction $f(x)$. — Continuité. — Non-existence de la tangente.

1. Joignons par une droite deux points A et B d'un plan (fig. 1). Partageons le segment AB en trois parties égales AC, CE, EB, et con-

[1] Nous considérons la direction de K vers K' comme la direction positive de la sécante KK' si K' *succède* K sur la courbe, ce qui détermine la direction positive de la tangente T.

[2] Ce théorème simple, que nous n'avons pas rencontré ailleurs, est d'une grande utilité dans la suite. La démonstration est immédiate. En effet, si K est précédé par L et succédé par M, LK et KM coïncident, à la limite, avec la direction positive de T, donc l'angle formé par ces directions tend vers zéro; or, cet angle étant supérieur à l'angle KLM, ce dernier tend aussi vers zéro, ce qui prouve que LM coïncide, à la limite, avec la direction positive de T.

struisons sur CE comme base un triangle équilatéral CDE. Nous aurons une ligne brisée $ACDEB$ formée par 4 segments égaux. Pour fixer le côté vers lequel doit être tourné le triangle, nous conviendrons de regarder une direction (par exemple celle de A vers B) comme positive et de considérer comme positif le côté laissé à gauche quand on parcourt le segment dans le sens positif. Pour abréger, nous désignons par Ω cette opération au moyen de laquelle on passe d'un segment rectiligne AB à la ligne polygonale $ACDEB$ déviant de AB vers le côté positif.

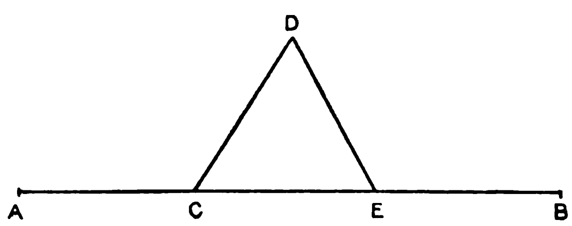


Fig. 1.

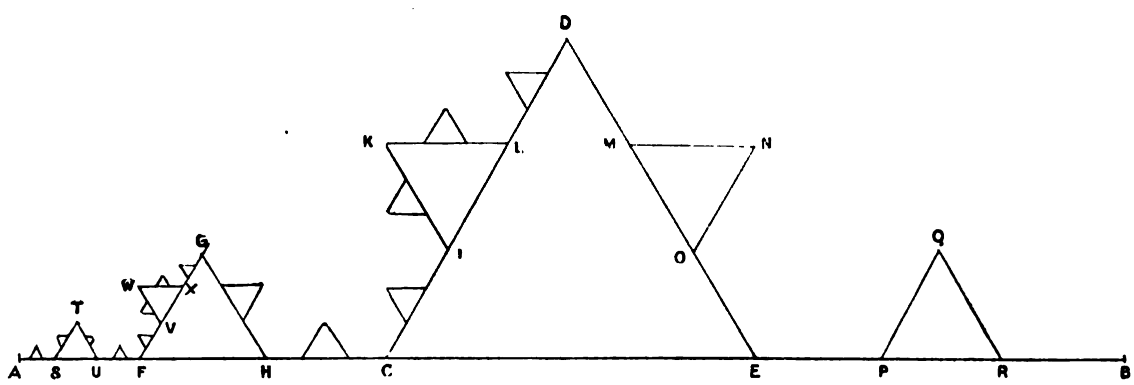


Fig. 2.

2. Partons maintenant d'une ligne droite déterminée AB, le sens de A vers B étant considéré comme positif (fig. 2). Par l'opération Ω, AB est remplacée par la ligne brisée $ACDEB$, les segments AC, CD, DE, EB étant égaux entre eux et leur sens positif étant respectivement celui de A vers C, de C vers D, de D vers E, de E vers B.

Effectuons l'opération Ω sur chacun de ces segments; la ligne $ACDEB$ sera remplacée par la ligne brisée $AFGHCIKLDMNOEPQRB$ composée de 16 segments égaux AF, FG etc.

Sur chacun de ces derniers segments nous effectuons encore l'opération Ω; nous aurons une ligne brisée $ASTUF\ldots$ composée par $4^3 = 64$ segments égaux entre eux AS, ST etc.

Effectuant l'opération Ω sur chacun de ces nouveaux segments et continuant ainsi indéfiniment, nous obtenons une suite indéfinie de lignes polygonales que nous désignerons par

$$P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n, \ldots \tag{1}$$

et qui se composent respectivement de

$$1, 4, 4^2, \ldots, 4^{n-1}, \ldots$$

côtés. P_1 désigne la droite primitive AB, P_2 la ligne $ACDEB$ et ainsi de suite.

Nous allons voir que, quand n croît indéfiniment, P_n tend vers une courbe continue P qui ne possède, en aucun point, de tangente déterminée.

3. Nous nommerons *sommets* de P_1 les deux points A et B, *sommets* de P_2 les $4 + 1$ points A, C, D, E, B, *sommets* de P_3 les $4^2 + 1$ points $A, F, G, \ldots, B$ et ainsi de suite. On voit que P_n aura $4^{n-1} + 1$ sommets, que tous les $4^{n-2} + 1$ sommets de P_{n-1} sont aussi des sommets de P_n et que, par suite, le nombre de sommets nouveaux introduits par le passage de P_{n-1} à P_n est égal à $3 \cdot 4^{n-2}$.

Désignons par S l'ensemble des sommets de toutes les lignes (1). De la construction résulte que si l'on considère un côté quelconque KL d'une ligne quelconque P_a il y aura, dans chaque voisinage de K, une infinité de points S situés sur KL; désignant par IK le côté de P_a qui précède KL il y a par la même raison, dans chaque voisinage de K, une infinité de points S situés sur IK. Les côtés IK et KL formant entre eux un angle IKL égal, selon les cas, à $60°$ ou à $120°$, on peut donc affirmer que la droite joignant deux sommets quelconque K et K' ne peut pas tendre vers une position limite déterminée quand le point K' (tout en restant sommet) tend vers K d'une manière quelconque. (Si $K = A$ ou $K = B$ il faut modifier légèrement le raisonnement qui précède).

Désignons par S' l'ensemble des points limites [1] des points S.

Chaque point de la courbe que nous allons définir sera ou un sommet ou un point limite des sommets; autrement dit, notre courbe sera composée par un ensemble de points P compris tout entier dans l'ensemble S'. [2]

4. Pour définir P, nous allons faire correspondre à chaque point X du segment AB un point déterminé $K(X)$ de P et nous introduirons en même temps une fonction continue $f(x)$ qui joue un rôle fondamental pour l'étude de la courbe.

Désignons par x la distance de A au point X. Si ce point appartient à S' nous prendrons

$$K(X) = X$$

et

$$f(x) = 0.$$

Dans le cas contraire nous menons de X une perpendiculaire XX_1 à AX (dirigée vers le côté positif de AB).

En prolongeant suffisamment cette perpendiculaire, on rencontre nécessairement le contour d'une ou de plusieurs des lignes P_ν. Soit P_a la première ligne rencontrée et X_1 le point de rencontre.

Si X_1 est un point de S' nous prenons

$$K(X) = X_1$$

et nous désignons par $f(x)$ la longueur XX_1.

Dans le cas contraire, X_1 appartient à un des segments rectilignes qui composent P_a, terminé par deux sommets consécutifs — soit S_1 et S_2 — de P_a. Menons alors de X_1 une perpendiculaire X_1X_2 à S_1S_2 (dirigée vers le côté positif de S_1S_2). Soit P_β la première des lignes (1) qu'on rencontre — soit en X_2 — en prolongeant suffisamment la perpendiculaire dont il s'agit.

[1] D'après la terminologie de M. G. Cantor, S' est la première dérivée de S. D'après ce qui a été dit plus haut il résulte que tout point de S appartient à S'. Dire qu'un point K appartient à S' revient donc à dire que c'est ou un sommet ou un point limite des sommets.

[2] Réciproquement tout point de S' appartient à P, c'est-à-dire on a $P = S'$, ce qui résulte facilement des résultats que nous allons établir.

Si X_2 est un point de S' nous ferons

$$K(X) = X_2$$

et nous désignerons par $f(x)$ la somme des longueurs XX_1 et X_1X_2.

Si X_2 n'est pas un point de S' nous désignons par T_1, T_2 les extrémités du segment de P_β sur lequel se trouve X_2; ces extrémités seront certains sommets consécutifs de P_β. Nous élevons de X_2 une perpendiculaire X_2X_3 sur T_1T_2 vers le côté positif et désignons par X_3 le premier point de rencontre avec une des lignes P_n.

Continuant ainsi de proche en proche deux cas pourront se présenter. Ou bien on rencontrera, après avoir élevé un certain nombre de perpendiculaires:

$$XX_1\,,\ X_1X_2\,,\ \ldots,\ X_{k-1}X_k$$

dont on désignera respectivement par $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_k(x)$ les longueurs, un point X_k appartenant à S', et alors on prendra $K(X) = X_k$ et désignera par $f(x)$ la somme de ces perpendiculaires; ou bien on ne rencontrera jamais un point de S'. Dans le dernier cas, on aura une suite indéfinie de perpendiculaires

$$XX_1\,,\ X_1X_2\,,\ X_2X_3\,,\ \ldots \tag{2}$$

dont on désignera les longueurs respectives par $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... et dont la somme sera, ainsi que nous démontrerons, égale à un nombre fini.

En effet, prenant la distance AB comme unité de longueur, le segment CE est égal à $\frac{1}{3}$ et la perpendiculaire abaissée du point D (fig. 2) sur CE est égal à $\frac{1}{6}\sqrt{3}$. CDE étant le plus grand triangle de la figure, on a évidemment

$$f_1(x) = XX_1 \leq \frac{1}{6}\sqrt{3}$$

pour toute valeur de x de l'intervalle considéré

$$0 \leq x \leq 1. \tag{3}$$

Les triangles FGH, IKL etc. construits sur les côtés de $P_2 = ACDEB$

ayant leurs côtés égaux à $\frac{1}{9}$, ceux construits sur les côtés de $P_\cdot$ ayant leurs côtés égaux à $\frac{1}{27}$ et ainsi de suite on obtient de même

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
&f_2(x) = X_1X_2 \leqq \frac{1}{2}\frac{1}{9}\sqrt{3},\\
&f_3(x) = X_2X_3 \leqq \frac{1}{2}\frac{1}{27}\sqrt{3},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f_k(x) = X_{k-1}X_k \leqq \frac{1}{2}\frac{1}{3^k}\sqrt{3},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

pour tout l'intervalle (3).

La somme des longueurs (2) ne peut donc pas être supérieure au nombre

$$\frac{1}{2}\sqrt{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots\right) = \frac{1}{4}\sqrt{3}$$

et est, par suite, convergente. La somme de cette série dont l'existence est ainsi démontrée sera désignée par $f(x)$; en suivant indéfiniment la ligne brisée $XX_1X_2X_3\dots$ on approchera donc indéfiniment d'un point déterminé qui, nous le convenons, sera le point $K(X)$ correspondant à X et dont la distance de X, mesurée le long de la ligne brisée $XX_1X_2X_3\dots$, sera égale à $f(x)$. On voit immédiatement que $K(X)$ fait partie de l'ensemble S'.

Si nous convenons, dans le cas où la suite des perpendiculaires (2) ne contient que k termes, de mettre

$$f_{k+1}(x) = 0, \qquad f_{k+2}(x) = 0 \ , \quad \dots$$

nous avons donc une fonction $f(x)$ définie, pour toute valeur de x de l'intervalle $0 - 1$, par la formule

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots.$$

Tous les points $K(X)$ ainsi obtenus constituent, par définition, notre ensemble P. A chaque point X sur AB correspond un point bien déterminé $K(X)$ de P dont la position est définie moyennant la fonction $f(x)$.

Il nous faut commencer par prouver que cet ensemble constitue une *courbe continue*, dans le sens ordinaire de ce mot.

5. De deux points K_1 et K_2 de P correspondant à des valeurs x_1 et x_2 de x, nous voyons que K_1 *précède* K_2 si $x_1 < x_2$ que K_1 *succède* K_2 dans le cas contraire.[1] De trois points K_1, K_2, K_3 correspondants aux valeurs x_1, x_2, x_3 où

$$x_1 < x_2 < x_3$$

K_2 est *intermédiaire* aux points K_1, K_3.

Ainsi, par exemple, entre les deux points A et B de notre P nous avons trois points intermédiaires C, D, E appartenant à la ligne P_2, 15 points intermédiaires F, G, H etc. appartenant à P_3 et ainsi de suite.

De même entre deux sommets consécutifs S_1 et S_2 de la ligne P_α, qui sont, par définition, des points de P, il y a trois points intermédiaires (appartenant à $P_{\alpha+1}$), 15 points intermédiaires (appartenant à $P_{\alpha+2}$) et ainsi de suite.

Nous avons défini un point quelconque K de P en menant successivement certaines perpendiculaires

$$XX_1 , X_1X_2 , \ldots \tag{2}$$

rencontrant respectivement P_α en X_1, P_β en X_2, et ainsi de suite, X_1 étant situé entre deux sommets S_1, S_2 de P_α et de même X_2 entre deux sommets T_1, T_2 de P_β etc. Le point K est donc, d'après notre définition, un point intermédiaire à S_1 et S_2, intermédiaire à T_1 et T_2 et ainsi de suite. Dans le cas où la suite (2) se prolonge indéfiniment nous aurons donc une suite infinie de segments

$$S_1S_2 , T_1T_2 , \ldots$$

décroissant indéfiniment et embrassant tous le point K qui se trouve ainsi intercalé entre des points dont la distance diminue indéfiniment.

6. Il nous faut prouver que la fonction $f(x)$ qui est une fonction bien déterminée de x dans l'intervalle

$$0 \leqq x \leqq 1 \tag{3}$$

est aussi *continue* dans cet intervalle. Pour cela nous montrerons d'abord que chacune des fonctions

$$f_1(x) , f_2(x) , \ldots$$

[1] Cf. les définitions adoptées au début.

est continue dans l'intervalle dont il s'agit et ensuite que la somme de ces fonctions y converge uniformément.

Par définition, $f_1(x)$ est la distance d'un point d'une certaine ligne continue C_1 (composée par une infinité de segments rectilignes) à la droite AB et cette fonction est donc nécessairement continue. Aux points extrêmes A, B cette fonction s'annule.

$f_2(x)$ est la distance d'un point d'une certaine ligne continue C_2 (semblable à C_1) à un certain côté S_1S_2 de la ligne polygonale P_a; en considérant $f_2(x)$ comme fonction de l'arc mesuré le long de S_1S_2 on voit que c'est une fonction continue de cet arc et, par conséquent, de la variable x dans l'intervalle correspondant. Or, $f_2(x)$ étant égal à zéro pour les valeurs de x correspondant aux extrémités S_1, S_2 et la même circonstance se présentant pour les côtés voisins de P_a, on voit que $f_2(x)$ est continue dans tout l'intervalle (3).

La même démonstration s'applique aux autres fonctions $f_3(x), f_4(x), \ldots$.

Toutes les fonctions $f_1(x), f_2(x), \ldots$ *sont donc continues dans l'intervalle* (3).

Maintenant, comme ces fonctions satisfont aux inégalités (4) dans cet intervalle, on voit que leur somme $\Sigma f_\nu(x)$ y converge uniformément. Donc, d'après un théorème classique, *la fonction* $f(x)$ *représentée par cette série est une fonction continue dans cet intervalle.*

7. Désignons maintenant par $K(x)$ le point de P correspondant à la valeur x de l'intervalle $0 \ldots 1$. Pour voir que P est un arc de courbe continue au point K, il nous faut montrer que

$$\lim K(x') = K(x)$$

pour

$$\lim x' = x$$

c'est-à-dire que la distance entre les points $K(x')$ et $K(x)$ diminue indéfiniment avec $|x' - x|$.

Prenons d'abord le cas où $K(x)$ est un point appartenant à une des lignes P_ν ou, ce qui revient au même, que ce point soit défini par un nombre fini de perpendiculaires

$$XX_1, \; X_1X_2, \; \ldots, \; X_{k-1}X_k$$

rencontrant respectivement les lignes polygonales

$$P_{a_1}, P_{a_2}, \ldots, P_{a_k}$$

aux points $X_1, X_2, \ldots, X_k$ des côtés respectifs

$$(5) \qquad S_1 S_1', S_2 S_2', \ldots, S_k S_k',$$

le point X_i étant sur P_{a_i} entre les sommets S_i et S_i'. Soient

$$X' X_1', X_1' X_2', \ldots$$

la suite (finie ou infinie) de perpendiculaires définissant le point $K(x')$, x' étant une valeur voisine de x. Il résulte de la construction adoptée que si l'on choisit $|x' - x|$ suffisamment petit on peut faire en sorte que les points

$$X_1', X_2', \ldots, X_k'$$

appartiennent respectivement aux côtés (5) et que la distance entre X_k' et X_k soit inférieure à une quantité δ donnée d'avance.

Or, on passe du point X_k' au point $K(x')$ par une suite de perpendiculaires

$$X_k' X_{k+1}', X_{k+1}' X_{k+2}', \ldots$$

de longueurs respectives

$$f_{k+1}(x'), f_{k+2}(x'), \ldots.$$

Comme

$$f_{k+1}(x) = 0, \qquad f_{k+2}(x) = 0, \quad \ldots$$

on a, à cause de la continuité de la somme $\Sigma f_\nu(x)$,

$$\lim_{x'=x} \left(f_{k+1}(x') + f_{k+2}(x') + \ldots\right) = 0.$$

La distance absolue entre les points X_k' et $K(x')$ ne pouvant être supérieure à la longueur de la ligne brisée

$$X_k' X_{k+1}' X_{k+2}' \ldots$$

c'est-à-dire à

$$f_{k+1}(x') + f_{k+2}(x') + \ldots$$

on voit donc que cette distance tend vers zéro avec $|x' - x|$. Comme il en est de même de la distance entre X'_k et $X_k = K(x)$, il est donc prouvé que la distance entre $K(x)$ et $K(x')$ diminue indéfiniment avec $|x' - x|$.

Considérons en second lieu le cas où le point donné $K(x)$ est défini par un nombre illimité de perpendiculaires

$$XX_1, X_1X_2, \ldots$$

rencontrant respectivement les lignes

$$P_{a_1}, P_{a_2}, \ldots$$

aux points

$$X_1, X_2, \ldots$$

des côtés

$$S_1S'_1, S_2S'_2, \ldots$$

et conservons d'ailleurs les notations du cas précédent.

Soit ε une quantité donnée; choisissons k suffisamment grand pour que la somme

$$f_{k+1}(x) + f_{k+2}(x) + \ldots$$

soit moindre que $\frac{\varepsilon}{3}$, pour tout l'intervalle (3). On voit alors que la distance des points X_k et $K(x)$ et de même que la distance entre X'_k et $K(x')$ est moindre que $\frac{\varepsilon}{3}$. Choisissons enfin $|x' - x|$ suffisamment petit pour que la distance entre X_k et X'_k soit inférieure à $\frac{\varepsilon}{3}$, ce qui est toujours possible d'après ce qui précède. Il est alors évident que la distance entre $K(x)$ et $K(x')$ est moindre que ε ou, en d'autres termes, que cette distance peut être rendue aussi petite qu'on le veut en faisant $|x' - x|$ suffisamment petit.

Donc l'ensemble P constitue un arc de courbe continue en chaque point.

Dans ce qui va suivre, nous conservons la lettre P pour désigner la courbe ainsi définie.

8. En joignant les points A, D et D, B (fig. 2) par des droites, on obtient un triangle ADB *circonscrit* à la courbe P, en entendant par

là que tout point de P se trouve à l'intérieur ou sur le contour de ce triangle. En effet la construction adoptée montre d'abord que chaque *sommet* se trouve à l'intérieur ou sur le contour de ce triangle (ainsi, par exemple T, W, G, K se trouvent sur la droite AD) et il en est donc de même de l'ensemble S' des points limites des sommets.

Par la même raison, le triangle AGC est circonscrit à la partie de la courbe P comprise entre A et C (fig. 2), le triangle CKD est circonscrit à la partie comprise entre C et D et ainsi de suite.

Par conséquent la partie de P comprise entre C et E se trouve à l'intérieur ou sur la limite du pentagone $CKDNE$ (où l'on remarque que les côtés CK et EN sont perpendiculaires à AB).

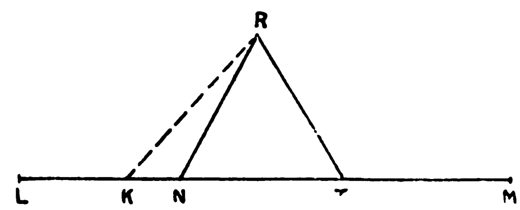


Fig. 3.

De la même manière on voit que, si LM (fig. 3) est un côté quelconque d'une ligne brisée P_a, tout point de P intermédiaire à L et M se trouve à l'intérieur ou sur le contour d'un triangle LRM où chacun des angles L et M est égal à 30°; et les points N et T divisant LM en trois segments égaux, la partie de P compris entre N et T se trouve nécessairement compris dans un pentagone construit sur NT comme base et semblable à celui dont il était question tout à l'heure.

Pour abréger nous appellerons CE *segment lacunaire* de AB (fig. 2), FH segment lacunaire de AC etc.; d'une manière générale, LM (fig. 3) étant un côté de P_a, le segment NT sera désigné comme *segment lacunaire* de ce côté. Adoptant cette terminologie, on voit que sur AB (fig. 2) il y a 1 segment lacunaire CE de longueur $\frac{1}{3}$ (AB étant supposé $= 1$), 2 segments FH et PR de longueur $\left(\frac{1}{3}\right)^2$, 4 segments lacunaires de longueur $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ et ainsi de suite. La somme de tous ces segments est donc égale à

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2^{\nu-1}}{3^\nu}+\cdots=1$$

c'est-à-dire égale à la longueur de AB.

Par la méthode adoptée pour définir la courbe P, on a été amené à construire sur chaque segment lacunaire comme base un triangle équilatéral; et l'opération Ω définie au n° 1 consiste précisément à remplacer un segment lacunaire (par exemple FH) par une ligne brisée (FGH) composée par les deux autres côtés du triangle en question.

Convenant de désigner par Λ l'opération qui consiste à effectuer l'opération Ω sur tous les segments lacunaires de AB simultanément, on voit que, par cette opération, la droite AB se trouve remplacée par une certaine courbe continue C_1 composée par des segments rectilignes formant entre eux des angles égaux à 60°. C'est la courbe dont il a été question au n° 6; son équation en coordonnées rectangulaires (A étant l'origine et AB l'axe des x) peut s'écrire

$$y=f_1(x),$$

$f_1(x)$ étant la fonction définie au n° 4.

Au lieu de définir la courbe P à l'aide d'une suite d'opérations Ω, nous pouvons maintenant l'obtenir par une succession d'opérations Λ. Après avoir remplacé, à l'aide de l'opération Λ, la droite primitive AB par la ligne C_1, on peut effectuer sur chacun des segments rectilignes qui composent C_1 la même opération et ainsi indéfiniment. On obtient ainsi une succession illimitée de courbes

$$AB\,,\ C_1\,,\ \ldots$$

et des considérations bien simples montrent qu'on arrive ainsi à une courbe limite identique à P.

En adoptant cette méthode de définir P, on peut démontrer simplement que tout point de P est un point ***simple*** de la courbe ou, en d'autres termes, qu'à des points distincts X, X' de AB correspondent des points distincts $K(X)$, $K(X')$ de la courbe. Soient en effet

$$\text{(K)}\qquad XX_1\,,\ X_1X_2\,,\ \ldots$$

et

$$\text{(K')}\qquad X'X_1'\,,\ X_1'X_2'\,,\ \ldots$$

les suites de perpendiculaires définissant respectivement $K(X)$ et $K(X')$ et admettons que les points limites $K(X)$ et $K(X')$ coïncident; nous en conclurons que X et X' doivent coïncider aussi.

Considérons d'abord le cas où les deux suites (K) et (K') sont illimitées.

Le point X de AB doit se trouver sur un des segments lacunaires de AB (les extrémités du segment étant exclues); car dans le cas contraire X serait un sommet ou un point limite des sommets et l'on aurait, par suite, $K(X) = X$ contrairement à l'hypothèse. Par la même raison X' doit se trouver sur un segment lacunaire. Il est clair dès lors que X et X' doivent se trouver sur le même segment lacunaire; car dans le cas contraire on pourrait affirmer, d'après ce qui précède, que $K(X)$ et $K(X')$ se trouveraient respectivement compris dans deux pentagones n'ayant aucun point en commun, ce qui serait contraire à l'hypothèse $K(X) = K(X')$.

Par définition, X_1 désigne le point où la perpendiculaire XX_1 rencontre la ligne C_1; X_1 est donc un point d'un certain segment rectiligne de C_1 et le même raisonnement que plus haut montre que X_1 doit appartenir à un segment lacunaire; de même X'_1 doit appartenir à un segment lacunaire et on conclut comme plus haut que X_1 et X'_1 appartiennent nécessairement au même segment lacunaire. Continuant ainsi de proche en proche on démontre que quelque grand que soit k, les points X_k et X'_k se trouvent sur le même segment lacunaire. Or le segment qui comprend X_1 et X'_1 fait, d'après la construction adoptée, un angle égal à 60° ou 120° avec le segment comprenant X et X'. Désignant par XX' la distance entre les points X et X' on a donc la relation

$$X_1X'_1 = 2XX';$$

le même raisonnement s'appliquant aux points X_k, X'_k on a la relation générale

$$X_kX'_k = 2X_{k-1}X'_{k-1} \qquad (k=2, 3, \ldots)$$

d'où

$$X_kX'_k = 2^kXX'$$

ce qui, X_k et X'_k tendant par hypothèse vers un même point $K(X) = K(X')$, exige nécessairement

$$XX' = 0$$

c'est-à-dire que les points X, X' coïncident.

Il nous reste à considérer le cas où l'une au moins des deux suites $(K), (K')$ consiste d'un nombre fini de termes. Supposons par exemple que la suite (K) consiste de k termes

$$XX_1, X_1X_2, \ldots, X_{k-1}X_k$$

et que la suite (K') contienne un nombre de termes (fini ou infini) $\geqq k$.

Par les mêmes raisons que dans le cas précédent on voit alors que X et X' se trouvent sur un même segment lacunaire, que X_1 et X'_1 se trouvent sur un même segment lacunaire, ..., que X_{k-1} et X'_{k-1} se trouvent sur un même segment lacunaire. Supposons que X et X' soient des points distincts; il en est alors de même de X_{k-1} et X'_{k-1} (car on a $X_{k-1}X'_{k-1} = 2^{k-1}XX'$) et, par conséquent, de X_k et X'_k; or $X_k = K(X)$ étant par hypothèse un point de l'ensemble S' (c'est-à-dire un sommet ou un point limite des sommets), X'_k ne peut pas être un point de S' (car alors on aurait $X'_k = K(X')$ contrairement à l'hypothèse $K(X') = K(X)$). Par conséquent X'_k doit appartenir à un segment lacunaire. Soit NT (fig. 3) le segment lacunaire comprenant X_{k-1} et X'_{k-1}; alors X_k est un point de S' se trouvant sur l'un ou sur l'autre des deux côtés NR et TR et X'_k appartient à un segment lacunaire — disons N_1T_1 — appartenant à l'un de ces côtés. Les points de la courbe P intermédiaires à N_1 et T_1 se trouvent, d'après ce qui précède, compris dans un certain pentagone dont le contour n'a d'autres points en commun avec les côtés NR et TR que les points du segment N_1T_1; X_k est donc séparé de ce contour et ne peut pas coïncider avec le point $K(X')$ (défini par la suite (K')) qui est un point de la courbe P intermédiaire à N_1 et T_1. Le théorème est donc démontré.

Donc P est un arc continu simple.

9. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème qui fait l'objet principal de notre étude.

Théorème. *La courbe P n'admet en aucun point une tangente déterminée.*

Considérons d'abord un point K de la courbe qui est en même temps un sommet d'une ligne polygonale P_a.

Dans chaque voisinage de K il y a une infinité de sommets K' et, d'après ce qui a été dit plus haut (pag. 150), nous savons que la droite joignant K à un point K' ne peut tendre vers une limite déterminée lorsque K' s'approche de K d'une manière quelconque. Or, les points K et K' étant des points de la courbe, la droite KK' est une secante de P qui tendrait vers une position déterminée si la tangente en K existait. Donc la courbe ne peut pas avoir en K une tangente déterminée.

Considérons, en second lieu, le cas où le point K est situé sur une ligne polygonale P_a mais *n'est pas* un sommet. K est alors nécessairement un point limite des sommets et reste, par conséquent, commun à toutes les lignes

$$P_\alpha, P_{\alpha+1}, \ldots .$$

On peut donc supposer l'indice α choisi aussi grand que l'on veut. Cela remarqué, soit LM le côté de P_a sur lequel se trouve K (fig. 3) et $LNRTM$ la ligne brisée obtenue en effectuant l'opération Ω sur LM. Les sommets N, R, T sont donc des points de la courbe P et l'on a

$$LN = NR = RT = TM.$$

Mais de là résulte que l'angle RKN est compris entre 30° et 60°.

Or, K est situé sur la courbe P *entre* les points L et N (ou *entre* les points T et M); donc,[1] si la courbe avait en K une tangente déterminée, la sécante KR tendrait (pour $\alpha = \infty$) vers la même limite que LN (ou TM) ce qui est impossible, l'angle formé par ces droites appartenant à l'intervalle 30°...60°.

Considérons, comme dernier cas, un point K de P qui n'est situé sur aucune des lignes P_a. Dans ce cas, K est défini par une suite illimitée de perpendiculaires

$$XX_1, X_1X_2, X_2X_3, \ldots$$

rencontrant respectivement les lignes polygonales

$$P_\alpha, P_\beta, P_\gamma$$

aux points $X_1, X_2, X_3, \ldots$ des côtés

$$(6) \qquad S_1S_2, T_1T_2, U_1U_2, \ldots$$

[1] Voir l'introduction.

D'après ce qui précède K est un point de la courbe P situé *entre* les points S_1 et S_2, *entre* les points T_1 et T_2, *entre* les points U_1 et U_2 et ainsi de suite. La suite des points

$$S_1\,,\ T_1\,,\ U_1\,,\ \ldots$$

s'approchent de K indéfiniment du même côté, c'est-à-dire ces points *précèdent* tous le point K; et c'est du côté opposé que s'approchent les points

$$S_2\,,\ T_2\,,\ U_2\,,\ \ldots.$$

Donc, si la courbe avait en K une tangente déterminée, les sécantes (6) auraient cette tangente comme limite commune. Or, cela est impossible, l'angle formé par deux sécantes consécutives étant, selon les cas, égal à 60° ou 120°.

Le théorème est donc démontré pour tout point de la courbe.

II.

Questions de rectification et de quadrature. — Représentation paramétrique.

10. Désignons par L_i la longueur de la ligne polygonale P_i. Le segment AB (fig. 2) étant pris pour unité de longueur on a $L_1 = AB = 1$. Par l'opération Ω, P_1 se change en P_2, cette dernière ligne ayant visiblement la longueur $\frac{4}{3}$. En passant de P_2 et P_3 la longueur se trouve encore une fois multipliée par $\frac{4}{3}$ et ainsi de suite. On a donc, d'une manière générale

$$L_\nu = \left(\frac{4}{3}\right)^{\nu-1}$$

d'où

$$\lim_{\nu=\infty} L_\nu = \infty.$$

Il en résulte que la longueur de l'arc de courbe P compris entre A et B est infinie. De la même manière on peut démontrer le même de l'arc compris entre deux sommets quelconques, d'où se déduit sans diffi-

culté que *la longueur de l'arc compris entre deux points quelconques de la courbe est infinie.*

Il est aussi facile d'évaluer l'aire comprise entre la courbe et l'une de ses cordes. Prenons par exemple la corde AB. L'aire comprise entre $AB = P_1$ et P_2 est égale à l'aire d'un triangle équilateral de base $= \frac{1}{3}$, c'est-à-dire égale à

$$\frac{1}{36}\sqrt{3} = \frac{1}{16}\sqrt{3}\cdot\frac{4}{9};$$

l'aire comprise entre P_2 et P_3 est égal à la somme de 4 triangles (voir fig. 2) équilatéraux de base égale à $\frac{1}{9}$; cette aire est donc égale à

$$4\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4\sqrt{3} = \frac{1}{16}\sqrt{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^2.$$

Pour avoir l'aire Δ_ν comprise entre P_ν et $P_{\nu+1}$ rappelons que P_ν est une ligne polygonale de $4^{\nu-1}$ côtés dont chacun est égale à $\frac{1}{3^{\nu-1}}$; pour passer de P_ν à $P_{\nu+1}$ on construit sur chaque côté un petit triangle équilatéral de base $\frac{1}{3^\nu}$. On a donc

$$\Delta_\nu = 4^{\nu-1}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3^{2\nu}}\sqrt{3} = \frac{1}{16}\sqrt{3}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^\nu.$$

L'aire cherchée Δ étant égale à la somme des aires $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ on trouve donc

$$\Delta = \sum_{\nu=1}^{\infty}\Delta_\nu = \frac{1}{16}\sqrt{3}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^\nu$$

c'est-à-dire

$$\Delta = \frac{1}{20}\sqrt{3}.$$

11. Indiquons maintenant comment peuvent s'exprimer les coordonnées cartésiennes u, v d'un point de la courbe P en fonctions uniformes par rapport à un paramètre.

Comme axe des u nous prenons la droite AB (fig. 2), comme axe des v une droite passant par A et perpendiculaire à AB (comptée positivement

du bas en haut). Soient x la distance d'un point quelconque X de AB à l'origine A, $K(x)$ le point correspondant de la courbe (défini, comme il a été expliqué précédemment, par une certaine suite de perpendiculaires XX_1, X_1X_2, ...), $u = u(x)$ et $v = v(x)$ les coordonnées rectangulaires de ce point K.

Nous avons posé plus haut

$$XX_1 = f_1(x), \qquad X_1X_2 = f_2(x) \ , \quad . \ . \ .$$

et

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots .$$

La droite XX_1 étant perpendiculaire à l'axe des u, sa projection sur cet axe est nulle. Quant à X_1X_2, cette droite forme avec l'axe des u un angle qui, selon les cas, est égal à 30° ou 150°. Désignons par $\{f_2(x)\}$ la projection de X_1X_2 sur l'axe des u. Désignons, d'une manière analogue par

$$\{f_3(x)\}\ , \{f_4(x)\}\ , \dots$$

les projections de X_2X_3, X_3X_4, ... sur l'axe des u.

Enfin, désignons par

$$\{\{f_1(x)\}\}\ , \{\{f_2(x)\}\}\ , \{\{f_3(x)\}\}\ , \dots$$

les projections de XX_1, X_1X_2, X_2X_3, ... sur l'axe des v. (On a évidemment $\{\{f_1(x)\}\} = f_1(x)$).

Il résulte de ces définitions que $\{f_i(x)\}$ et $\{\{f_i(x)\}\}$ sont des fonctions continues de x dans l'intervalle 0...1 et que les modules de ces fonctions sont au plus égaux à $f_i(x)$. Comme $u(x) - x$ et $v(x)$ sont respectivement les projections sur l'axe des u et l'axe des v de la ligne brisée

$$XX_1X_2X_3 \dots$$

(les extrémités de cette ligne étant les points X et K), nous pouvons donc écrire

$$u = x + \{f_2(x)\} + \{f_3(x)\} + \dots ,$$

$$v = f_1(x) + \{\{f_2(x)\}\} + \{\{f_3(x)\}\} + \dots . \tag{7}$$

Comme la série $\Sigma f_\nu(x)$ converge uniformément dans tout l'intervalle 0...1, il en est de même, et à plus forte raison, des séries nouvelles

ainsi définies qui représentent les coordonnées u, v d'un point de notre courbe. Ces séries représentent donc des fonctions *continues* dans l'intervalle dont il s'agit.

Par les formules (7) nous avons donc les coordonnées u, v exprimées en fonctions uniformes et continues d'un paramètre x tout le long de la courbe.

Nous verrons, dans le paragraphe suivant, comment une simple transformation permet de passer de la courbe P à une courbe P' où l'on peut choisir l'abscisse u elle-même comme paramètre et exprimer l'ordonnée v en fonction uniforme et continue par rapport à u tout le long de la courbe.

III.

Transformation de P en une courbe P' où l'ordonnée est une fonction uniforme de l'abscisse.

12. Considérons dans le plan des coordonnées (x, y) un segment rectiligne AB formant un angle quelconque avec l'axe des x (fig. 5). Partageons AB en trois parties égales AC, CE, EB et construisons sur CE comme base un triangle CDE dont la *médiane* MD (M étant le point divisant la base CE en deux parties égales CM et ME) est parallèle à l'axe des y, dirigée vers les y positifs et égale à

$$\frac{CE}{2}\sqrt{3}.$$

On sait alors que cette médiane est égale à la médiane d'un triangle *équilatéral* construit sur la même base CE.

Nous appellerons Ω' l'opération par laquelle on passe ainsi d'un segment rectiligne AB à la ligne brisée $ACDEB$.

13. Prenons maintenant sur l'axe des x un segment AB, A étant l'origine et la distance AB étant choisie pour unité de longueur (fig. 4). Effectuons sur le segment notre opération Ω' (ce qui revient à effectuer l'opération Ω définie au n° 1). AB se trouve ainsi remplacé par une ligne polygonale $ACDEB$ composée par 4 côtés et que nous désignerons

par P'_2. Effectuant sur chacun de ces côtés la même opération Ω' on passe à une ligne polygonale P'_3 composée par 4^2 côtés, sur lesquels on effectue la même opération et ainsi de suite indéfiniment. Désignant, pour plus de symétrie, AB par P'_1, on a ainsi défini une suite illimitée de lignes polygonales

$$P'_1, P'_2, P'_3, \ldots .$$

Je dis que ces lignes tendent indéfiniment vers une courbe continue P' dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, peut s'écrire

$$y = \varphi(x)$$

$\varphi(x)$ étant une fonction uniforme et continue de x dans l'intervalle $0 \ldots 1$.

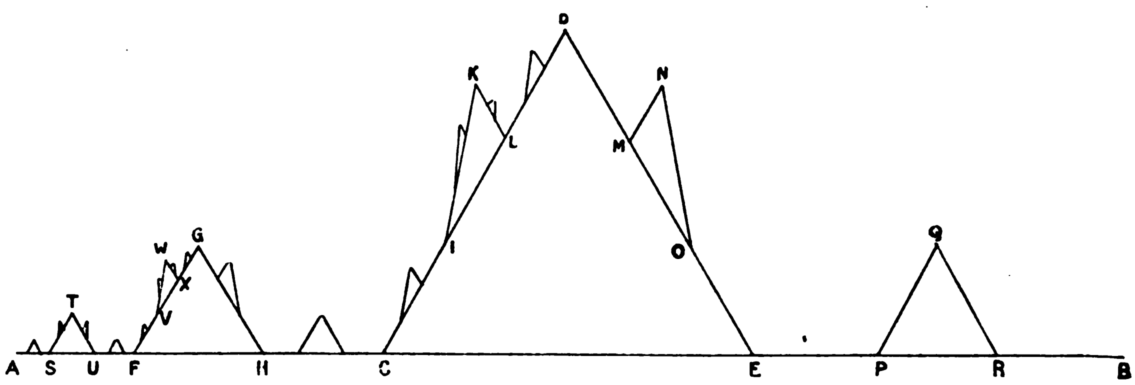


Fig. 4.

14. Désignons par S l'ensemble des sommets (c'est-à-dire les points où deux côtés d'une ligne P'_ν se rencontrent) et par S' l'ensemble des points limites de S. (On voit que chaque point de S appartient à S'.)

Soit x la distance d'un point quelconque X de AB à l'origine A. Si X est un point de S' nous prenons

$$y = \varphi(x) = 0.$$

Dans le cas contraire nous élevons en X une perpendiculaire sur AB dirigée vers les y positifs. Cette perpendiculaire rencontre successivement certaines des lignes P'_ν, soit

$$P'_\alpha, P'_\beta, P'_\gamma, \ldots$$

aux points respectifs

$$X_1, X_2, X_3, \ldots .$$

Posons

$$XX_1 = \varphi_1(x), \qquad X_1X_2 = \varphi_2(x), \qquad X_2X_3 = \varphi_3(x)\ , \quad \ldots$$

et convenons de mettre, si X_k est un point de S'

$$\varphi_{k+1}(x) = 0, \qquad \varphi_{k+2}(x) = 0\ , \quad \ldots .$$

Par un raisonnement tout analogue à celui employé plus haut (n° 6) nous voyons alors que les fonctions $\varphi_\nu(x)$ sont uniformes et continues dans l'intervalle $0 \ldots 1$ et que leur somme $\varphi(x)$ y converge uniformément. Donc si nous posons

$$(8) \qquad y = \varphi(x), \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

y est une fonction uniforme et continue dans cet intervalle.

Nous voilà donc en possession d'une courbe P' où l'ordonnée s'exprime en fonction uniforme et continue (8) par rapport à l'abscisse dans tout l'intervalle considéré.

15. Je dis que *la fonction $\varphi(x)$ n'admet, pour aucune valeur de x, une dérivée finie et déterminée.*[1]

Si K est un point de P' qui appartient en même temps à l'une des lignes P'_ν, la démonstration est tout analogue à celle employée plus haut pour la courbe P.

Considérons donc le cas contraire où le point K est la limite d'une suite indéfinie de points X, X_1, X_2, ..., sa distance y à l'axe des x étant égale à la série infinie

$$y = \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x) + \ldots .$$

Supposons que la perpendiculaire XK rencontre successivement les lignes polygonales

$$P'_{a_1}\ , \ P'_{a_2}\ , \ \ldots$$

aux points

$$X_1\ , \ X_2\ , \ \ldots$$

[1] Nous laissons indécidé, dans ce qui suit, s'il peut y avoir des valeurs x où la dérivée est déterminée mais *infinie.*

situés respectivement sur les côtés

$$S_1S_1', \ S_2S_2', \ \ldots$$

de ces lignes. Tous les triangles construits successivement dans notre figure ayant leurs médianes parallèles à l'axe des y nous pouvons (voir fig. 5) distinguer le côté CD d'un tel triangle situé à gauche de la médiane du côté DE situé à droite. Pour abréger le raisonnement qui suit, nous appellerons les côtés tels que CD *côtés à gauche* et les côtés tels que DE *côtés à droite*.

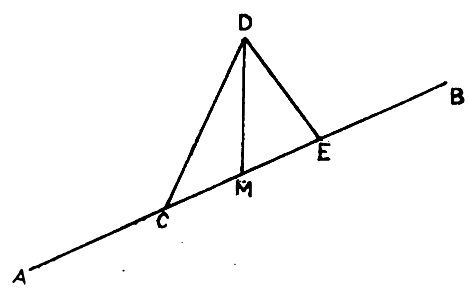


Fig. 5.

Cela convenu, remarquons tout d'abord que dans un triangle CDE de notre figure (fig. 5) construit sur un côté à *gauche* AB, CD est un côté à *gauche* formant avec AB un angle DCB *moindre* que 60° et que DE est un côté à *droite* formant avec AB un angle DEC *plus grand* que 60°.

Le cas opposé se présenterait si AB était un côté à droite. Donc, si dans la figure construite on considère deux côtés successifs (c'est-à-dire ayant un point commun) dont l'un est à gauche et l'autre à droite, ces deux côtés forment un angle qui reste, de quelque manière qu'on ce déplace sur la figure, supérieur à 60°.

16. Distinguons maintenant entre les trois cas suivants.

1) Si grand que l'on choisisse l'indice k, il y a dans la suite

$$(9) \qquad S_kS_k', \ S_{k+1}S_{k+1}', \ \ldots$$

une infinité de côtés à gauche et une infinité de côtés à droite. De ce que nous venons de dire de l'angle formé par deux côtés successifs résulte alors que les droites (9) ne peuvent pas tendre vers une direction limite déterminée; par suite, le point K de la courbe étant situé *entre* les deux

points S_ν et S'_ν quelque grand que soit ν, il ne peut y avoir au point K une tangente déterminée.

2) A partir d'un certain indice k tous les côtés (9) sont à gauche.

Dans ce cas il est facile de voir que la droite $S_\nu S'_\nu$ coïncide à la limite (pour $\nu = \infty$) avec une droite parallèle à l'axe des y. En effet soit AB, CD deux côtés à gauche consécutifs (voir fig. 5) et soit DE le côté à droite correspondant (d'après la construction adoptée on a alors $CM = ME$ et la médiane MD est parallèle à l'axe des y). Désignons par β l'angle DMB formé par le côté AB et la verticale et par β' l'angle formé par CD et la verticale. DM étant plus grand que CM en vertu de la construction, l'angle β' ou CDM est plus petit que l'angle DCM d'où l'on obtient

$$\beta' < \frac{1}{2}\beta$$

Considérant un côté à gauche consécutif à CD et désignant par β'' l'angle qu'il forme avec la verticale on a, par la même raison

$$\beta'' < \frac{1}{2}\beta'$$

et ainsi de suite. Par là on voit donc que les angles

$$\beta, \beta', \beta'', \ldots$$

diminuent indéfiniment et tendent vers zéro.

Or, le point K étant intermédiaire à S_ν et S'_ν nous savons que, s'il y avait une tangente T déterminée au point K, la sécante $S_\nu S'_\nu$ tendrait indéfiniment vers T comme position limite. Donc T serait nécessairement parallèle à l'axe des y, c'est-à-dire la dérivée de $\varphi(x)$ au point considéré serait infinie.

3) A partir d'un certain indice k tous les côtés (9) sont à droite.

Comme dans le cas précédent, on arrive à la conclusion que si $\varphi(x)$ avait une dérivée déterminée pour la valeur considérée de x, cette dérivée serait infinie.

Le théorème énoncé est donc vrai dans tous les cas.

IV.

Généralisation de la méthode.

17. Prenons sur un segment rectiligne AB deux points C, E entre A et B et désignons par a, b, c respectivement les longueurs des segments AC, CE, EB. Construisons sur CE comme base un triangle équilateral CDE tourné vers le côté positif de AB.

Nous désignerons par $\Omega(a, b, c)$ l'opération par laquelle on passe ainsi du segment AB à la ligne polygonale $ACDEB$ composée par 4 segments ayant pour longueurs respectives a, b, b, c et nous appellerons respectivement a, b, c le premier, le second, le troisième paramètre de Ω.

Désignant par L la longueur de AB et par L' celle de la transformée de AB (c'est-à-dire la ligne $ACDEB$), on a la relation

$$L' = L + b.$$

La somme $a + b + c$ étant égale à la longueur du segment AB, on voit que, ce segment étant regardé comme donné, il y a une infinité double (dépendant de deux paramètres indépendants, par exemple a et b) d'opérations Ω qu'on peut effectuer sur AB. Nous dirons qu'on effectue »une opération Ω» sur AB si on effectue l'opération $\Omega(a, b, c)$ avec des valeurs données positives (non nulles) de a, b, c (compatibles, bien entendu, avec la relation $a + b + c = AB$).

Ces définitions adoptées, partons d'un segment rectiligne AB que nous désignons par P_1 et dont la longueur L_1 sera choisi pour unité de longueur:

$$L_1 = 1.$$

Choisissons une suite de nombres positifs

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$$

tels que

$$1 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \ldots$$

et tels, en outre, que la somme

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \ldots$$

ait une valeur finie ε.

Effectuons sur P_1 une opération Ω ayant pour second paramètre un nombre b_1 remplissant la condition

$$b_1 \leqq \varepsilon_1$$

ce qui nous donne une ligne polygonale P_2 composée par 4 côtés rectilignes; effectuons sur chacun de ces côtés une opération Ω où le second paramètre est au plus égal à ε_2; nous obtenons alors une ligne polygonale P_3 composée par 4^2 côtés; sur chacun de ces derniers nous effectuons une opération Ω où le second paramètre est au plus égal à ε_3 et ainsi de suite indéfiniment.

Soit $P_1, P_2, P_3, \ldots$ la suite des lignes polygonales ainsi définies et conservons d'ailleurs les mêmes notations que précédemment (n° 3, 4). Ainsi nous appelons *sommet* tout point où deux côtés successifs d'une ligne P_n se rencontrent (et aussi chacun des points A et B) et nous désignons par S l'ensemble de tous les sommets, par S' l'ensemble des points limites des sommets. A tout point X de AB nous faisons correspondre un point déterminé $K(X)$ défini par une suite de perpendiculaires

$$XX_1,\ X_1X_2,\ X_2X_3,\ \ldots$$

successivement construites comme au n° 4. Désignant par x la distance de X au point A nous posons

$$f_1(x) = XX_1, \qquad f_2(x) = X_1X_2, \quad \ldots .$$

Dans le cas où X_k est un sommet ou un point limite des sommets nous prenons comme précédemment

$$K(X) = X_k,$$

$$f_{k+1}(x) = f_{k+2}(x) = \ldots = 0.$$

Dans le cas contraire on démontre facilement que X_k tend (pour $k = \infty$) vers un point limite bien déterminé que nous désignons par $K(X)$; car la somme

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots$$

est convergente ce qui résulte des inégalités faciles à établir:

$$f_1(x) < \varepsilon_1, \qquad f_2(x) < \varepsilon_2, \quad \ldots$$

et de l'hypothèse faite sur les ε_ν.

De la même manière qu'au n° 6 on peut démontrer que chacune des fonctions $f_\nu(x)$ est continue dans l'intervalle $0 \dots 1$, que la somme $\Sigma f_\nu(x)$ y converge uniformément et que, par conséquent, $f(x)$ est une fonction uniforme et continue dans cet intervalle. Et on conclut de là que l'ensemble des points $K(x)$ obtenu en faisant varier x de 0 à 1 constitue un arc de courbe continue P.

Cette courbe possède des propriétés très différentes selon les différentes valeurs attribuées aux paramètres des opérations Ω employées et l'on conçoit qu'il y a là une méthode pour construire des courbes possédant telle ou telle propriété exigée à l'avance. Dans ce qui suit nous nous bornerons à considérer un exemple particulièrement simple.

Choisissons, dans chaque opération $\Omega(a, b, c)$ employée pour la construction de P, le premier paramètre a égal au troisième c et déterminons le second paramètre b de la manière suivante. Choisissons une suite de nombres décroissants

$$b_1, b_2, b_3, \dots$$

et suffisamment petits pour que l'on puisse effectuer sur $AB = P_1$ une opération Ω ayant b_1 pour second paramètre, sur chacun des segments de la ligne P_2 ainsi obtenue une opération Ω ayant b_2 pour second paramètre et ainsi de suite. (Il suffit par exemple de supposer $b_1 \leqq \frac{1}{3}$, $b_2 \leqq \frac{b_1}{3}$, $b_3 \leqq \frac{b_2}{3}$, ...).

Désignant la longueur de la ligne P_ν par L_ν on voit alors facilement que

$$\begin{aligned} L_1 &= 1, \\ L_2 &= L_1 + b_1, \\ L_3 &= L_2 + 4b_2, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ L_\nu &= L_{\nu-1} + 4^{\nu-2} b_{\nu-1}, \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

d'où

$$L_\nu = 1 + b_1 + 4b_2 + \dots + 4^{\nu-2} b_{\nu-1}.$$

Donc la limite de L_ν (pour $\nu = \infty$) est finie ou infinie selon que la série

$$\Sigma 4^\nu b_\nu$$

converge ou diverge d'où l'on conclut que la courbe P est rectifiable dans le premier cas, non rectifiable dans le second cas.

Considérons maintenant un point K de P. Si K est un sommet on démontre, en raisonnant comme plus haut (n° 9) que la courbe P n'a pas une tangente déterminée en ce point; il en est de même si K est un point limite des sommets défini par une suite *infinie* de perpendiculaires

$$XX_1, X_1X_2, \ldots.$$

Dans le cas au contraire où K est un point limite des sommets, défini par une suite *finie* de perpendiculaires, le raisonnement employé au n° 9 tombe en défant si la série $\Sigma 4^\nu b_\nu$ converge; il est donc douteux si l'on peut par la méthode adoptée former une courbe *rectifiable* et *sans tangente*, et il y a lieu de se poser la question si de telles courbes existent ou non; en tout cas, une méthode de trancher cette question nous apporterait sans doute des connaissances nouvelles sur la structure infinitésimale des courbes planes.

SUR LES FONCTIONS CONVEXES ET LES INÉGALITÉS ENTRE LES VALEURS MOYENNES[1]

PAR

J. L. W. V. JENSEN

À COPENHAGUE.

1. *Des fonctions convexes et concaves. Définition. Exemples.*

Dans sa célèbre Analyse algébrique (note II, pp. 457—59) CAUCHY démontre que »la moyenne géométrique entre plusieurs nombres est toujours inférieure à leur moyenne algébrique». La méthode employée par CAUCHY est extrêmement élégante, et elle à passé sans changement dans tous les traités d'analyse algébrique. Elle consiste, comme on sait, en ceci, que, de l'inégalité

$$\sqrt{ab} < \frac{1}{2}(a + b),$$

où a et b sont des nombres positifs, on est conduit à l'inégalité analogue pour quatre nombres, savoir

$$\sqrt[4]{abcd} < \frac{1}{4}(a + b + c + d),$$

et aux suivantes, pour $8, 16, \ldots, 2^m$ nombres, après quoi ce nombre, par un artifice, est réduit à un nombre arbitraire inférieur, n. Cette méthode simple a été mon point de départ dans les recherches suivantes, qui conduisent, par une voie en réalité très simple et élémentaire, à des résultats généraux et non sans importance.

[1] Conférence faite à la Société mathématique danoise le 17 janvier 1905.

J'introduirai la définition suivante. Lorsqu'une fonction $\varphi(x)$, réelle, finie et uniforme, de la variable réelle x, satisfait dans un certain intervalle à l'inégalité

$$\varphi(x) + \varphi(y) \geq 2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right), \tag{1}$$

on dit que $\varphi(x)$ est une fonction convexe dans cet intervalle.

Si au contraire $\varphi(x)$ satisfait à l'inégalité

$$\varphi(x) + \varphi(y) \leq 2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right), \tag{2}$$

on dit que $\varphi(x)$ est une fonction concave.

On suppose en outre que ces inégalités ne se réduisent pas *constamment,* dans l'intervalle donné, à l'égalité

$$\varphi(x) + \varphi(y) = 2\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right); \tag{3}$$

dans ce cas la fonction $\varphi(x)$ est dite »linéaire» dans l'intervalle donné.

Cette expression a été adoptée parceque l'égalité (3) est satisfaite par $\varphi(x) = a + bx$.

Il ressort de ces définitions que les fonctions »linéaires» forment une transition de la classe des fonctions convexes à celle des fonctions concaves, et qu'elles doivent être considérées comme des cas limites communs aux deux classes.

Des définitions données il résulte immédiatement que $-\varphi(x)$ est concave, lorsque $\varphi(x)$ est convexe, et inversement. Il serait par suite suffisant dans ce qui suit de considérer seulement les fonctions convexes, puisque l'on passe si aisément d'une classe à l'autre. Comme toutefois il peut y avoir avantage à considérer les deux classes de fonctions, les fonctions concaves seront aussi mentionnées de temps en temps; mais on devra se souvenir, même lorsque ce ne sera pas toujours rappelé, qu'à toute proposition relative aux fonctions convexes correspond une proposition analogue pour les fonctions concaves.

Comme l'objet principal de cette recherche est de présenter une série d'inégalités d'un caractère général, comprenant comme cas particuliers presque toutes les inégalités jusqu'ici connues, nous allons développer d'abord les théorèmes nécessaires propres à ce but, avant d'entreprendre l'étude plus approfondie des fonctions convexes elles-mêmes.

Il sera d'abord nécessaire d'énoncer quelques propositions qui résultent immédiatement des définitions, et de donner quelques exemples des classes de fonctions définies.

Une somme de fonctions convexes ou »linéaires» est convexe, lorsque l'une au moins des fonctions est convexe. Si $\varphi(x)$ est convexe, et c une constante positive, $c\varphi(x)$ est convexe. Ces propositions sont également vraies pour les fonctions concaves. Exemples:

1°. x^2 est une fonction convexe dans tout intervalle. Donc $a+bx+cx^2$ est convexe ou concave suivant que c est positif ou négatif.

2°. $|x|$ est »linéaire» dans tout intervalle qui ne comprend pas le zéro, mais convexe dans le cas contraire. Donc $\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu |x - x_\nu|$, où les c sont des constantes positives, est convexe ou »linéaire» dans tout intervalle, convexe si l'intervalle comprend une ou plusieurs des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$, »linéaire», si cela n'a pas lieu.

3°. L'inégalité

$$pa^{p-1}(a-b) > a^p - b^p > pb^{p-1}(a-b),$$

qui a lieu pour $a > b > 0$, et pour toute valeur de p supérieure à 1, est bien connue.[1] Si x et y sont positifs, et $x > y$, on déduit de cette inégalité

$$x^p - \left(\frac{x+y}{2}\right)^p > p\left(\frac{x+y}{2}\right)^{p-1}\frac{x-y}{2} > \left(\frac{x+y}{2}\right)^p - y^p$$

ou

$$(\alpha) \qquad x^p + y^p > 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^p.$$

Donc x^p, pour des valeurs de x positives et une valeur de p supérieure à 1, est une fonction convexe. De la dernière inégalité il résulte, en changeant x et y en $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$,

$$x^{-p} + y^{-p} > 2\left(\frac{x+y}{2xy}\right)^p \geqq 2\left(\frac{2}{x+y}\right)^p = 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^{-p}.$$

[1] On peut facilement la déduire de l'identité

$$\frac{1-a^n}{1-a} = 1 + a + a^2 + \ldots + a^{n-1}$$

par une méthode tout à fait élémentaire.

Donc x^{-p}, lorsque $p > 1$, est une fonction convexe pour les valeurs positives de x. Si au contraire on met dans (α) $x^{\frac{1}{p}}$ et $y^{\frac{1}{p}}$ à la place de x et de y, on obtient

$$(\beta) \qquad 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^{\frac{1}{p}} > x^{\frac{1}{p}} + y^{\frac{1}{p}}.$$

x^p est donc une fonction concave, pour x positif, lorsque $0 < p < 1$. De (β) il résulte

$$\frac{2}{\left(\frac{x+y}{2}\right)^{\frac{1}{p}}} < \frac{4}{x^{\frac{1}{p}} + y^{\frac{1}{p}}} \leq \frac{x^{\frac{1}{p}} + y^{\frac{1}{p}}}{(xy)^{\frac{1}{p}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{p}}} + \frac{1}{y^{\frac{1}{p}}},$$

qui est encore vraie pour $p = 1$. Ainsi x^{-p} est aussi convexe lorsque $0 < p \leqq 1$.

En résumé, pour les valeurs positives de x, on voit que x^p est convexe lorsque p est plus grand que 1, ou négatif, et concave lorsque $0 < p < 1$. Si $p = 1$, la fonction est »linéaire», comme on l'a vu plus haut.

4°. $|\sqrt{a + bx^2}|$ est convexe pour $a > 0$, $b > 0$, concave pour $ab < 0$, tant que le binôme sous le signe radical reste positif.

5°. e^{cx} est une fonction convexe dans tout intervalle, tandis que $\log x$ est concave dans l'intervalle $(0, +\infty)$.

6°. Le calcul différentiel nous fournit un moyen général de décider si des fonctions qui peuvent être différentiées sont convexes ou concaves. Si en effet $f(x)$ est réelle et uniforme dans un certain intervalle, et possède une deuxième dérivée déterminée, finie et continue, on aura, en vertu du théorème de Rolle

$$f(x) + f(y) - 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 f''(x'),$$

x' étant un nombre intermédiaire entre x et y. Donc $f(x)$ sera convexe tant que $f''(x)$ sera positive, concave tant que $f''(x)$ sera négative. La signification géométrique de ce fait est évidente. En effet, si une fonction convexe $\varphi(x)$ est *susceptible* d'une représentation géométrique en coordonnées rectangulaires l'équation $y = \varphi(x)$ définit une courbe, tournant sa convexité vers les y négatifs.

Remarque. Les trois inégalités suivantes

$$\psi(x)\psi(y) \geqq \left[\psi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]^2, \quad \psi(x) \text{ positif};$$

$$\psi(x) + \psi(y) \geqq 2\psi(\sqrt{xy}), \quad x \text{ et } y \text{ positifs};$$

$$\psi(x)\psi(y) \geqq [\psi(\sqrt{xy})]^2, \quad x \text{ et } y \text{ positifs, } \psi(x) \text{ positif};$$

peuvent être ramenées à (1) par des substitutions simples, savoir, respectivement:

$$\log \psi(x) = \varphi(x),$$
$$\psi(e^x) = \varphi(x),$$
$$\log \psi(e^x) = \varphi(x).$$

2. *Généralisation de l'inégalité* (1).

Supposons que $\varphi(x)$ soit une fonction convexe quelconque dans un intervalle donné, et que $x_1, x_2, x_3, \ldots$ soient tous situés dans cet intervalle ou à ses limites. De (1) il suit que

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3) + \varphi(x_4) \geqq 2\varphi\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) + 2\varphi\left(\frac{x_3+x_4}{2}\right)$$
$$\geqq 4\varphi\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}\right)$$

et généralement, m étant un entier positif

$$\sum_{\nu=1}^{2^m} \varphi(x_\nu) \geqq 2^m \varphi\left(2^{-m} \sum_{\nu=1}^{2^m} x_\nu\right),$$

comme on le voit facilement par l'induction complète. Si alors n est un entier positif, et si l'on choisit m tel que $2^m > n$, on peut poser

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_{2^m} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Et on trouve alors

$$\sum_{\nu=1}^{n} \varphi(x_\nu) + (2^m - n)\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right) \geqq 2^m \varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right),$$

ou

(4) $$\varphi\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right) \leqq \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} \varphi(x_\nu),$$

laquelle est une généralisation de l'inégalité (1), qui sert à définir les fonctions convexes.

Il est clair qu'une inégalité semblable s'applique aux fonctions concaves: il suffit de renverser le signe d'inégalité. Pour les fonctions »linéaires» l'inégalité devient simplement une égalité.

Supposons maintenant que $\varphi(x)$ est une fonction *continue* et convexe dans un certain intervalle. Nous savons qu'il existe de telles fonctions par les exemples précédents. Soit encore $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$, où tous les n_μ sont des entiers positifs. Il résulte de (4), en choisissant les x d'une manière convenable,

$$\varphi\left(\frac{1}{n}(n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_m x_m)\right) \leq \frac{1}{n}\left(n_1 \varphi(x_1) + n_2 \varphi(x_2) + \ldots + n_m \varphi(x_m)\right).$$

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_m$ des nombres positifs quelconques dont la somme est a, et faisons croître les n indéfiniment, mais de telle sorte que

$$\lim \frac{n_1}{n} = \frac{a_1}{a}, \qquad \lim \frac{n_2}{n} = \frac{a_2}{a}, \quad \ldots, \quad \lim \frac{n_{m-1}}{n} = \frac{a_{m-1}}{a},$$

d'où il résultera

$$\lim \frac{n_m}{n} = 1 - \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1}}{a} = \frac{a_m}{a},$$

et par suite, $\varphi(x)$ étant continue par hypothèse,

$$\varphi\left(\frac{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu x_\mu}{a}\right) \leq \frac{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu \varphi(x_\mu)}{a},$$

ce qui démontre le théorème suivant:

Lorsque $\varphi(x)$ est une fonction continue et convexe dans un intervalle donné, on aura l'inégalité

$$\varphi\left(\frac{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu}{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu}\right) \leq \frac{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi(x_\nu)}{\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu}, \tag{5}$$

où $x_1, x_2, \ldots$ représentent des nombres tous situés dans l'intervalle, et où $a_1, a_2, \ldots$ sont des nombres positifs, mais d'ailleurs quelconques.

Pour les fonctions concaves, le signe d'inégalité doit être renversée.

Cette proposition est d'une telle généralité, que peut-être toutes les inégalités connues entre les valeurs moyennes y sont comprises comme cas très particuliers.

3. *Applications de la formule* (5).

Dans ce qui suit, les nombres représentés par $a, b, c, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ seront supposés positifs. Posons dans la formule (5) $\varphi(x) = x^p$, $p > 1$, $x > 0$, donc $\varphi(x)$ est convexe, comme on l'a vu. On aura

$$\left(\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu}\right)^p \leq \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^p}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu},$$

ou

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu\right)^p \leq \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)^{p-1} \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu^p, \tag{6}$$

où tous les x sont positifs. L'inégalité (6) se réduit à une simple identité pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$. Elle reste aussi valable pour $p < 0$, tandis qu'elle doit être renversée pour $0 < p < 1$. Pour $a_1 = a_2 = \ldots = 1$ on retrouve un résultat donné auparavant par M. H. Simon.[1]

En y faisant $p = 2$, et en remplaçant a_ν par a_ν^2, x_ν par $\frac{b_\nu}{a_\nu}$, on trouve

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu\right)^2 \leq \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^2 \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^2, \tag{7}$$

formule due à Cauchy (*loc. cit.*, p. 455), qui en donne d'ailleurs une démonstration toute différente.

Posons dans (7) $a_\nu^{\frac{1}{2}} x_\nu^{\frac{1}{2}}$ pour a_ν, $a_\nu^{\frac{1}{2}} x_\nu^{-\frac{1}{2}}$ pour b_ν, nous avons

$$\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} \frac{a_\nu}{x_\nu}} \leq \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu x_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu},$$

[1] *Über einige Ungleichungen*, Zeitschrift für Math. u. Physik, t. 33, p. 57, 1888.

d'où suit que la moyenne harmonique entre plusieurs nombres positifs est plus petite que leur moyenne algébrique.

Il est facile de généraliser la formule (7).

Remplaçons dans (6) x_ν par $\left(\frac{b_\nu}{a_\nu}\right)^{\frac{1}{p}}$ et extrayons la racine $p^{\text{ième}}$ des deux membres, nous aurons

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{1-\frac{1}{p}} b_\nu^{\frac{1}{p}} \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)^{1-\frac{1}{p}} \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\right)^{\frac{1}{p}},$$

qui peut être écrite sous la forme symétrique

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{x_1} b_\nu^{x_2} < \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)^{x_1} \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\right)^{x_2},$$

x_1, x_2 étant des constantes positives avec la somme 1.

Élevons les deux membres de l'inégalité ci-dessus à la puissance $x'^{\text{ième}}$ où x' est positif et < 1, et multiplions par $\left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\right)^{1-x'}$, nous trouvons

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{x_1} b_\nu^{x_2}\right)^{x'} \left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\right)^{1-x'} < \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)^{x_1 x'} \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\right)^{x_2 x'} \left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\right)^{1-x'},$$

ce qui démontre l'inègalité suivante

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu^{x_1} b_\nu^{x_2} c_\nu^{x_3} \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu\right)^{x_1} \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\right)^{x_2} \left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\right)^{x_3},$$

x_1, x_2, x_3 étant des constantes positives avec la somme 1. En continuant de cette manière on démontre par l'induction complète

$$(8) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu 1}^{x_1} a_{\nu 2}^{x_2} \dots a_{\nu k}^{x_k} \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu 1}\right)^{x_1} \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu 2}\right)^{x_2} \dots \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu k}\right)^{x_k},$$

où les x sont des constantes positives avec la somme 1.

Dans la formule (7), mettons $a_\nu^{\frac{1}{2}} b_\nu^{\frac{x}{2}}$ à la place de a_ν, et $a_\nu^{\frac{1}{2}} b_\nu^{\frac{y}{2}}$ à la place de b_ν, x et y étant des nombres réels quelconques, et posons, pour simplifier l'écriture, $S(x) = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu b_\nu^x$. On a:

$$\left(S\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)^2 < S(x) S(y),$$

et $\log S(x)$ est par suite une fonction convexe de x dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. La relation fondamentale (5) donne alors:

$$\log S\left(\frac{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu x_\mu}{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu}\right) \leqq \frac{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu \log S(x_\mu)}{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu}$$

ou

$$(9)\qquad \left(S\left(\frac{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu x_\mu}{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu}\right)\right)^{\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu} \leqq \prod_{\mu=1}^{m} (S(x_\mu))^{a_\mu}.$$

Pour $m = 2$, on a

$$\left(S\left(\frac{a_1 x_1 + a_2 x_2}{a_1 + a_2}\right)\right)^{a_1+a_2} \leqq (S(x_1))^{a_1}(S(x_2))^{a_2}$$

En y faisant $x_2 = x_0$, et $a_1 = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}$, $a_2 = \dfrac{x_1 - x}{x_1 - x_0}$, et supposant $x_1 > x > x_0$, on trouve

$$S(x) \leqq (S(x_1))^{\frac{x-x_0}{x_1-x_0}} (S(x_0))^{\frac{x_1-x}{x_1-x_0}},$$

ou bien

$$(S(x))^{x_1-x_0} \leqq (S(x_1))^{x-x_0}(S(x_0))^{x_1-x}.$$

D'où il suit

$$(10)\qquad \left(\frac{S(x)}{S(x_0)}\right)^{\frac{1}{x-x_0}} \leqq \left(\frac{S(x_1)}{S(x_0)}\right)^{\frac{1}{x_1-x_0}},$$

ou encore

$$(10')\qquad \left(\frac{S(x)}{S(x_1)}\right)^{\frac{1}{x-x_1}} \geqq \left(\frac{S(x_0)}{S(x_1)}\right)^{\frac{1}{x_0-x_1}}.$$

De (10) il résulte que la fonction $\left(\dfrac{S(x)}{S(x_0)}\right)^{\frac{1}{x-x_0}}$ n'est jamais décroissante lorsque x croît, x_0 restant invariable. Si dans (10') on permute x_1 et x_0,

il faut supposer $x_0 > x > x_1$, et l'on en conclut que $\left(\frac{S(x)}{S(x_0)}\right)^{\frac{1}{x-x_0}}$ n'est jamais croissante lorsque x décroît. Ce qui démontre la proposition suivante:

Les nombres $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ étant positifs, x étant une variable réelle quelconque, et x_0 une constante réelle quelconque, la fonction

$$\Phi(x) = \left(\frac{\sum_1^n a_\nu b_\nu^x}{\sum_1^n a_\nu b_\nu^{x_0}}\right)^{\frac{1}{x-x_0}}$$

est monotone et ne décroît jamais lorsque l'on fait croître x, tant dans l'intervalle $(-\infty, x_0)$, que dans l'intervalle $(x_0, +\infty)$. On a d'ailleurs $\Phi(x_0 - \varepsilon) < \Phi(x_0 + \varepsilon)$, ε étant positif.

La dernière partie de la proposition résulte de ce que

$$(S(x_0))^2 \leq S(x_0 + \varepsilon) S(x_0 - \varepsilon)$$

comme on l'a vu plus haut.

Cette proposition comprend comme cas particuliers quelques propositions de Schlömilch[1] dont voici l'énoncé:

Soit n nombres positifs $\alpha, \beta, \gamma \ldots \lambda$, et $S_p = \alpha^p + \beta^p + \ldots + \lambda^p$, on aura

$$\frac{S_1}{n} < \sqrt{\frac{S_2}{n}} < \sqrt[3]{\frac{S_3}{n}} < \ldots$$

et

$$\frac{S_1}{n} > \left(\frac{S_{\frac{1}{2}}}{n}\right)^2 > \left(\frac{S_{\frac{1}{3}}}{n}\right)^3 > \ldots.$$

Du reste Bienaymé[2] a énoncé sans démonstration une proposition qui est très voisine de notre proposition ci-dessus. Plus tard M. H. Simon[3] a publié une démonstration d'un cas spécial.

[1] *Über Mittelgrössen verschiedener Ordnungen*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, t. 3, p. 301, 1858.

[2] Société philomatique de Paris, Extraits des procès-verbaux des séances pendant l'année 1840, p. 67, Paris 1841.

[3] A l'endroit cité.

SCHLÖMILCH détermine aussi les valeurs limites

$$\lim_{p=\infty}\left(\frac{S_p}{n}\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad \lim_{p=\infty}\left(\frac{S_{\frac{1}{p}}}{n}\right)^{p}.$$

On trouve facilement pour notre fonction, que

$$\lim_{x=0}\left(\frac{S(x)}{S(0)}\right)^{\frac{1}{x}} = (b_1^{a_1} b_2^{a_2} \ldots b_n^{a_n})^{\frac{1}{a_1+a_2+\ldots+a_n}},$$

et

$$\lim_{x=\infty}\left(\frac{S(x)}{S(0)}\right)^{\frac{1}{x}} = b,$$

où b est le plus grand des nombres $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Pour faire une autre application de la formule fondamentale (5), posons $\varphi(x) = \log x$, $\varphi(x)$ est concave et on aura parsuite

$$\log \frac{\sum_1^n a_\nu b_\nu}{\sum_1^n a_\nu} > \frac{\sum_1^n a_\nu \log b_\nu}{\sum_1^n a_\nu},$$

ou

$$(11) \qquad \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} > (b_1^{a_1} b_2^{a_2} \ldots b_n^{a_n})^{\frac{1}{a_1+a_2+\ldots+a_n}},$$

ce qui est une forme généralisée, due à M. L. J. ROGERS[1], de la proposition classique sur la moyenne géométrique.

On trouve une autre inégalité d'un caractère semblable en remarquant que $x \log x$ est convexe pour x positive. La voici

$$(12) \qquad \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} < (b_1^{a_1 b_1} b_2^{a_2 b_2} \ldots b_n^{a_n b_n})^{\frac{1}{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n}}.$$

Le cas spécial où $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 1$ a aussi été donné par M. ROGERS.

Ces exemples doivent suffire pour montrer combien la formule (5) est féconde.

[1] Messenger of Mathematics, t. 17, 1888.

Il est évident que l'on peut, dans les formules précédentes, lorsque Σa_ν, $\Sigma a_\nu x_\nu$, etc., sont des séries convergentes, faire croître n indéfiniment, et l'on obtient ainsi une suite d'inégalités entre certaines séries infinies.

On peut employer autrement la formule (11) dans la théorie des séries. *Soit* $\Sigma b_{\nu 1}$, $\Sigma b_{\nu 2}, \ldots, \Sigma b_{\nu n}$ *des séries convergentes à termes positifs, et soit* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *des constantes positives dont la somme est* 1, *la série*

$$\sum_{(\nu)} b_{\nu 1}^{a_1} b_{\nu 2}^{a_2} \ldots b_{\nu n}^{a_n}$$

sera aussi convergente.

La démonstration de cette proposition peut être déduite immédiatement de (11) en y faisant les b dépendants d'un indice nouveau ν, posant $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1$, et faisant la somme dans les deux membres pour $\nu = 1, 2, \ldots$.

4. *Applications sur le calcul intégral.* Il y a encore d'autres cas où l'on peut faire croître n indéfiniment. En se rappelant la définition d'une intégrale définie comme limite des valeurs d'une somme, ce qui précède nous donne toute une suite d'inégalités intéressantes entre des intégrales.

Supposons que $a(x)$ et $f(x)$ sont des fonctions intégrables dans l'intervalle $(0, 1)$, et que $a(x)$ est constamment positive. L'inégalité (5) donne

$$\varphi\left(\frac{\sum_1^n a\left(\frac{\nu}{n}\right) f\left(\frac{\nu}{n}\right)\frac{1}{n}}{\sum_1^n a\left(\frac{\nu}{n}\right)\frac{1}{n}}\right) \leq \frac{\sum_1^n a\left(\frac{\nu}{n}\right)\varphi\left(f\left(\frac{\nu}{n}\right)\right)\frac{1}{n}}{\sum_1^n a\left(\frac{\nu}{n}\right)\frac{1}{n}},$$

où $\varphi(x)$ *est supposée continue et convexe* dans l'intervalle (g_0, g_1), g_0 et g_1 étant les limites inférieure et supérieure de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $(0, 1)$. Or on sait que le produit de deux fonctions intégrables est une fonction intégrable, et qu'une fonction intégrable, par substitution dans une fonction continue, donne une fonction intégrable. On trouve alors, en faisant croître n indéfiniment

$$(5') \qquad \varphi\left(\frac{\int_0^1 a(x) f(x)\,dx}{\int_0^1 a(x)\,dx}\right) \leq \frac{\int_0^1 a(x)\varphi(f(x))\,dx}{\int_0^1 a(x)\,dx}.$$

Il va sans dire qu'on peut remplacer les intégrales $\int\limits_0^1$ dans cette formule par des intégrales correspondantes $\int\limits_a^b$.

Par analogie avec les formules précédentes, je citerai les exemples suivants d'application de la formule (5')

$$\left(\int_0^1 a(x)f(x)dx\right)^p \leqq \left(\int_0^1 a(x)dx\right)^{p-1} \int_0^1 a(x)(f(x))^p dx, \quad f(x) \text{ positif, } p > 1;$$

$$\left(\int_0^1 a(x)b(x)dx\right)^2 \leqq \int_0^1 (a(x))^2 dx \int_0^1 (b(x))^2 dx, \quad b(x) \text{ intégrable et positif;}$$

$$\int_0^1 (a_1(x))^{x_1}(a_2(x))^{x_2}\dots(a_k(x))^{x_k}dx$$
$$\leqq \left(\int_0^1 (a_1(x)dx)\right)^{x_1}\left(\int_0^1 (a_2(x)dx)\right)^{x_2}\dots\left(\int_0^1 (a_k(x)dx)\right)^{x_k},$$

les $a(x)$ étant positives et intégrables, et $x_1 + x_2 + \dots + x_k = 1$;

$$\frac{\int_0^1 a(x)b(x)dx}{\int_0^1 a(x)dx} \geqq e^{\frac{\int_0^1 a(x)\log b(x)dx}{\int_0^1 a(x)dx}};$$

$$\text{—„—} \leqq e^{\frac{\int_0^1 a(x)\log b(x)dx}{\int_0^1 a(x)b(x)dx}}.$$

De ces formules la deuxième et la quatrième sont des généralisations de formules connues. En posant dans la dernière $a(x) = 1$ on retrouve une formule de Schlömilch qui est particulièrement intéressante parcequ'elle conduit à un résultat important dans la recherche des zéros d'une série de Taylor, comme je le montrerai ailleurs.

5. *Etude plus approfondie des fonctions convexes.*

Après avoir montré l'utilité de la notion de »fonction convexe», nous reviendrons à l'étude de ces fonctions en général. Dans le § 2, nous avons montré que la formule (4) a lieu pour toute fonction convexe

$$\varphi\left(\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}\right) \leqq \frac{\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \ldots + \varphi(x_n)}{n}.$$

Si l'on y fait, n étant $> m$,

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_m = x + n\delta, \qquad x_{m+1} = \ldots = x_n = x,$$

on trouve

$$\varphi(x + m\delta) \leqq \frac{m}{n}\varphi(x + n\delta) + \frac{n-m}{n}\varphi(x)$$

ou

$$(\alpha) \qquad \frac{\varphi(x + n\delta) - \varphi(x)}{n} \geqq \frac{\varphi(x + m\delta) - \varphi(x)}{m}.$$

Mettant $-\delta$ à la place de δ, et supposant $x + n\delta$ et $x - n\delta$ compris dans l'intervalle donné, on trouve

$$(\beta) \qquad \frac{\varphi(x) - \varphi(x - m\delta)}{m} \geqq \frac{\varphi(x) - \varphi(x - n\delta)}{n}.$$

Comme on a, par suite de la définition,

$$\varphi(x + m\delta) - \varphi(x) \geqq \varphi(x) - \varphi(x - m\delta),$$

les inégalités (α) et (β) peuvent s'écrire

$$(\gamma) \quad \frac{\varphi(x + n\delta) - \varphi(x)}{n} \geqq \frac{\varphi(x + m\delta) - \varphi(x)}{m} \geqq \frac{\varphi(x) - \varphi(x - m\delta)}{m} \geqq \frac{\varphi(x) - \varphi(x - n\delta)}{n}.$$

Supposons alors que $\varphi(x)$ a une limite supérieure *finie* g dans l'intervalle donné, on aura, en prenant $m = 1$

$$\frac{g - \varphi(x)}{n} \geqq \varphi(x + \delta) - \varphi(x) > \varphi(x) - \varphi(x - \delta) \geqq \frac{\varphi(x) - g}{n},$$

d'où il résulte, si l'on fait décroître δ jusqu'à 0, en même temps que n croît indéfiniment, mais assez lentement pour que $x \pm n\delta$ ne sorte pas de l'intervalle,

$$\lim_{|\delta| = 0} (\varphi(x + \delta) - \varphi(x)) = 0.$$

Ainsi est démontrée la proposition suivante:

Une fonction convexe, qui a une limite supérieure finie dans un certain intervalle, est continue dans cet intervalle.[1]

La formule (5) s'applique donc à toute fonction semblable. On pourrait en déduire ce qui suit, mais il est plus simple de partir de la formule (γ).

Si l'on met dans celle-ci $\frac{\delta}{n}$ à la place de δ, on trouve, en supposant désormais δ *positif*

$$\frac{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)}{\delta} \geqq \frac{\varphi\left(x+\frac{m}{n}\delta\right)-\varphi(x)}{\frac{m}{n}\delta} \geqq \frac{\varphi(x)-\varphi\left(x-\frac{m}{n}\delta\right)}{\frac{m}{n}\delta} \geqq \frac{\varphi(x)-\varphi(x-\delta)}{\delta},$$

ce qui devient, en faisant converger $\frac{m}{n}$ vers un nombre positif quelconque, α, plus petit que 1

$$\frac{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)}{\delta} \geqq \frac{\varphi(x+\alpha\delta)-\varphi(x)}{\alpha\delta} \geqq \frac{\varphi(x)-\varphi(x-\alpha\delta)}{\alpha\delta} \geqq \frac{\varphi(x)-\varphi(x-\delta)}{\delta}.$$

Cette formule montre que $\frac{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)}{\delta}$ ne croît jamais lorsque δ décroît, et que ce quotient reste constamment plus grand que $\frac{\varphi(x)-\varphi(x-\delta')}{\delta'}$, où δ' est positif mais d'ailleurs quelconque. D'où il suit que

$$\lim_{\delta=+0} \frac{\varphi(x+\delta)-\varphi(x)}{\delta} \geqq \frac{\varphi(x)-\varphi(x-\delta')}{\delta'}$$

[1] Cette proposition s'applique également à une fonction concave, en y remplaçant »limite supérieure» par »limite inférieure». De ce qu'une »fonction linéaire» peut être considérée comme un cas particulier des deux classes de fonctions, il résulte:

Une »fonction linéaire» qui a dans un certain intervalle soit une limite supérieure, soit une limite inférieure, est continue.

De ce résultat on conclue aisément la proposition suivante: une »fonction linéaire» ayant ou une limite supérieure ou une limite inférieure dans un intervalle donné a toujours la forme $a + bx$ dans cet intervalle, a et b étant des constantes. Par là est pleinement justifiée la dénomination que nous avons introduite.

existe, et l'on voit de même que

$$\lim_{\delta=+0} \frac{\varphi(x)-\varphi(x-\delta)}{\delta} \leq \frac{\varphi(x+\delta')-\varphi(x)}{\delta'}$$

est aussi déterminée.

Ainsi est démontrée ce théorème:

Une fonction convexe $\varphi(x)$, qui a dans un certain intervalle une limite supérieure finie, a une fonction dérivée tant à droite, $\varphi'_+(x)$, qu'à gauche $\varphi'_-(x)$; la différence $\varphi'_+(x)-\varphi'_-(x)$ est positive ou nulle.

Aux fonctions concaves $\psi(x)$ s'applique une proposition analogue, qui résulte de ce qui précède, puisque $-\psi(x)$ est convexe.

6. *Quelques propositions de fonctions de fonctions.*

Si, dans l'intervalle (g, g'), $f(x)$ est une fonction convexe qui ne décroît pas lorsque x croît, et si $\varphi(x)$ est convexe dans un intervalle, dans lequel trouve lieu l'inégalité $g<\varphi(x)<g'$, $f(\varphi(x))$ est aussi convexe.

En effet, de

$$\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2},$$

il suit que

$$f\left(\varphi\left(\frac{x+y}{2}\right)\right) \leq f\left(\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\big(f(\varphi(x))+f(\varphi(x))\big),$$

ce qui démontre la proposition.

On démontre de même le schéma suivant:

$f(x)$	$\varphi(x)$	$f(\varphi x)$
convexe, croissante	convexe	convexe
concave, décroissante	convexe	concave
convexe, décroissante	concave	convexe
concave, croissante	concave	concave

Si $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ sont des fonctions inverses on démontre de même le schéma:

$\varphi(x)$	$\psi(x)$
convexe, croissante	concave, croissante
convexe, décroissante	convexe, décroissante
concave, décroissante	concave, décroissante

7. *Sur une certaine fonction convexe.* Nous avons vu plus haut que $\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu |x - x_\nu|$ est convexe dans tout intervalle qui comprend au moins un des points $x_1, x_2, \ldots$. Ceci peut servir à former une fonction convexe dont les dérivées à droite et à gauche sont différentes en tous les points d'un ensemble dénombrable réel, donné à l'avance.

Soit en effet $c_1, c_2, \ldots$ une suite infinie de nombres positifs, $x_1, x_2, \ldots$ une suite infinie de nombres réels et bornés, et supposons la série Σc_ν convergente. Il résulte des recherches sur le principe de CANTOR concernant la condensation des singularités qui sont exposées dans DINI-LÜROTH (*Theorie der Funktionen einer veränderlichen reellen Grösse*, § 108*) que la fonction

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu |x - x_\nu|$$

qui est convexe comme nous avons vu plus haut a partout une dérivée unique, sauf aux points $x_1, x_2, x_3, \ldots$. En ces points la fonction a une fonction dérivée à droite et une autre à gauche, et l'on a $f'_+(x_\nu) - f'_-(x_\nu) = 2c_\nu$.

Si par exemple, pour l'ensemble (x_ν), on choisit les nombres rationnels de l'intervalle $(0, 1)$ dans un ordre déterminé, $f(x)$ sera convexe dans cet intervalle, et aura une dérivée finie en tous les points irrationnels, tandis qu'aux points rationnels les fonctions dérivées à droite et à gauche diffèrent par un nombre positif.

En terminant je ne puis m'empêcher d'ajouter quelques remarques. Il me semble que la notion »fonction convexe» est à peu près aussi fondamentale que celles-ci: »fonction positive», »fonction croissante». Si je ne me trompe pas en ceci la notion devra trouver sa place dans les expositions élémentaires de la théorie des fonctions réelles.

Quant à la définition d'une fonction convexe de plusieurs variables la suivante est la plus naturelle.

La fonction réelle $\varphi(X)$ du point analytique réelle $X = (x, y, z, \ldots)$ est convexe, si dans un domaine simplement connexe et convexe on a toujours

$$\varphi\left(\frac{1}{2}(X_1 + X_2)\right) \leq \frac{1}{2}\varphi(X_1) + \frac{1}{2}\varphi(X_2),$$

où

$$\frac{1}{2}(X_1 + X_2) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \ldots\right).$$

Il est évident qu'une telle fonction est toujours fonction convexe de chacune des variables. L'inverse n'a pas lieu comme on le voit par un exemple:

$$f(x, y) = -|xy|^{\frac{2}{3}}.$$

Addition. Après avoir faite la conférence ci-dessus j'ai remarqué que la formule fondamentale (5) n'était pas entièrement nouvelle comme je le croyais. Je viens de trouver, dans une mémoire de M. A. Pringsheim,[1] une citation d'une note de M. O. Hölder[2] dans laquelle se trouve démontrée la formule en question. A la vérité les hypothèses de M. Hölder sont bien différentes des miennes en ce qu'il suppose que $\varphi''(x)$ existe. La formule très importante (5') n'est pas mentionnée davantage que la plupart des applications que j'ai données plus haut.

En même temps je veux démontrer une inégalité d'un autre caractère que celles données plus haut. Dans une addition[1] à sa mémoire précitée M. Pringsheim donne une démonstration élégante, qu'il attribue à M. Lüroth, de l'inégalité

$$(\alpha) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu^x < \left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\right)^x,$$

où les b sont positives et $x > 1$.

[1] *Zur Theorie der ganzen transcendenten Funktionen.* Sitzungsber. d. math. phys. Classe d. k. bayer. Akad. d. W., t. 32, p. 163—192. Nachtrag..., ibid. p. 295—303.

[2] *Über einen Mittelwertsatz,* Nachr. v. d. k. Gesellsch. d. W. zu Göttingen, 1889, p. 38—47.

Il est facile de généraliser cette démonstration. Soit, en effet, x une variable *positive* et $f(x)$ une fonction *positive* et *croissante* avec x, et soit $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ des constantes également positives, nous avons $f(b_\nu) < f(b)$ pour $\nu = 1, 2, \ldots, n$, b étant la somme $b_1 + b_2 + \ldots + b_n$. En multipliant par a_ν les deux membres de l'inégalité ci-dessus, et en sommant pour $\nu = 1, 2, \ldots, n$, on trouve

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu f(b_\nu) < f(b) \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu$$

ou

$$\frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu f(b_\nu)}{\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu} < f\left(\sum_{\nu=1}^{n} b_\nu\right).$$

C'est l'inégalité que j'avais en vue. Pour $a_\nu = b_\nu$ et $f(x) = x^{x-1}$, $x > 1$, nous retrouvons l'inégalité (α). A l'aide de celle-ci il est aisé de généraliser les conditions sous lesquelles la formule (8) est valable. Posons en effet dans celle-ci $a_{\nu\mu}^{x}$ pour $a_{\nu\mu}$, nous avons

$$\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu1}^{xx_1} a_{\nu2}^{xx_2} \ldots a_{\nu k}^{xx_k} \leqq \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu1}^{x}\right)^{x_1} \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu2}^{x}\right)^{x_2} \ldots \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu k}^{x}\right)^{x_k}$$

$$< \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu1}\right)^{xx_1} \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu2}\right)^{xx_2} \ldots \left(\sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu k}\right)^{xx_k},$$

ce qui fait voir que la formule (8) reste encore valable pour

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k > 1,$$

seulement le signe d'égalité est à écarter.

ÜBER EINEN SATZ VON HERRN PHRAGMÉN

VON

EDMUND LANDAU

in BERLIN.

Herr PHRAGMÉN hat in seiner Arbeit[1] *Sur un théorème de Dirichlet* einen Satz bewiesen, welchem folgende Voraussetzungen zu Grunde liegen:

Es sei

$$l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$$

eine Folge verschiedener positiver, der Grösse nach geordneter Constanten, welche mit n über alle Grenzen wachsen; ferner sei

$$c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$$

eine Folge beliebiger reeller Grössen, und es werde eine Function $f(t)$ durch die Gleichung

$$f(t) = \Sigma c_n$$

definiert, wo die Summation sich auf alle Werte von n bezieht, für welche $l_n \leqq t$ ist. Von dieser Function wird angenommen, dass sie sich auf die Form

$$f(t) = ct + t^\gamma \psi(t) \qquad (0 < \gamma < 1)$$

bringen lässt, wo c und γ Constanten sind und $\psi(t)$ eine für alle t innerhalb endlicher Schranken gelegene Function von t bezeichnet.[2]

---

[1] Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Stockholm, Bd. 49, 1892, S. 199—206.

[2] Mit einer häufig angewendeten Abkürzung lässt sich die obige Annahme schreiben

$$f(t) = ct + O(t^\gamma).$$

Dirichlet[1] hatte unter diesen Voraussetzungen, zu denen er die weitere hinzunahm, dass alle c_n positive ganze Zahlen sind, bewiesen:

Die unendliche Reihe

$$\varphi(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{l_n^{1+\rho}}$$

convergiert für $\rho > 0$, *und, wenn* ρ *zu* 0 *abnimmt, so existiert der Grenzwert*

$$\lim_{\rho=0} \rho\varphi(\rho)$$

und ist $= c$.

Herr Phragmén hat in der erwähnten Arbeit aus den obigen Voraussetzungen (wobei die c_n beliebig sind) mehr erschlossen. Er hat bewiesen:

Die Differenz

$$\varphi(\rho) - \frac{c}{\rho} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{l_n^{1+\rho}} - \frac{c}{\rho}$$

lässt sich in eine mindestens für $0 < \rho < \frac{1}{2}(1-\gamma)$ *convergente Potenzreihe*

$$(1) \qquad a_0 + a_1\rho + \ldots + a_m\rho^m + \ldots$$

entwickeln.

Er hat dadurch gezeigt, dass die in der Halbebene $R(\rho) > 0$ durch die Dirichlet'sche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{l_n^{1+\rho}}$$

definierte analytische Function $\varphi(\rho)$ über ein Stück der Geraden $R(\rho) = 0$ fortsetzbar ist. Sein Satz besagt nämlich, dass die Function sich im Kreise mit dem Mittelpunkt 0 und dem Radius $\frac{1}{2}(1-\gamma)$ regulär verhält, abgesehen vom Punkte $\rho = 0$, welcher für $c \gtrless 0$ ein Pol erster Ordnung mit dem Residuum c ist.

[1] *Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 19, 1839, S. 326—328; Werke, Bd. 1, 1889, S. 415—417.

Ich behaupte nun, dass der Convergenzradius der Potenzreihe (1) nicht nur $\geqq \frac{1}{2}(1-\gamma)$ ist, wie der Phragmén'sche Satz aussagt, sonders stets mindestens doppelt so gross, also $\geqq 1-\gamma$.[1] Dies ist in dem allgemeineren Satze[2] enthalten:

Die Function $\varphi(\rho)$ ist über die Gerade $R(\rho)=0$ fortsetzbar und verhält sich in der Halbebene $R(\rho)>\gamma-1$ regulär, abgesehen für $c \gtrless 0$ vom Punkte $\rho=0$.

Dieser Satz wird im Folgenden bewiesen werden.

§ 1.

Nach Voraussetzung giebt es eine Constante C, so dass in

$$f(t)=\sum_{l_n \leqq t} c_n = ct + t^{\gamma}\psi(t) \tag{2}$$

für alle t

$$|\psi(t)| < C \tag{3}$$

ist.

---

[1] Dieser Werth $1-\gamma$ lässt sich nicht mehr vergrössern, wie das einfache Beispiel $l_n = n$, $c_n = 1 + \frac{1}{n^{1-\gamma}}$ $(0<\gamma<1)$ zeigt. Hier ist

$$f(t)=\sum_{n=1}^{t}\left(1+\frac{1}{n^{1-\gamma}}\right)=t+O(t^{\gamma});$$

andererseits ist der Convergenzradius der Potenzreihe (1) genau $1-\gamma$, da $\rho=\gamma-1$ eine singuläre Stelle der für $R(\rho)>0$ durch die Dirichlet'sche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{n^{1-\gamma}}}{n^{1+\rho}}$$

definierten Function $\varphi(\rho)=\zeta(1+\rho)+\zeta(2-\gamma+\rho)$ ist, also auch von $\varphi(\rho)-\frac{1}{\rho}$.

[2] In dem Spezialfalle $l_n = n$ habe ich diesen Satz schon auf S. 77—79 der Arbeit bewiesen: *Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunction und die Ausdehnung der Tschebyschefschen Primzahlentheorie auf das Problem der Verteilung der Primideale,* Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 125, 1903.

Daraus lässt sich im Falle $c \gtrless 0$ folgern: für jedes positive ε ist von einer gewissen Stelle $\nu = \nu(\varepsilon)$ an (also für alle $n \geqq \nu$) die Ungleichheitsbedingung

$$l_n \leqq l_{n-1} + l_{n-1}^{\gamma+\varepsilon} \tag{4}$$

erfüllt.

In der That ist

$$f(t + t^{\gamma+\varepsilon}) - f(t) = c(t + t^{\gamma+\varepsilon}) + (t + t^{\gamma+\varepsilon})^\gamma \psi(t + t^{\gamma+\varepsilon}) - ct - t^\gamma \psi(t)$$
$$= ct^{\gamma+\varepsilon} + (t + t^{\gamma+\varepsilon})^\gamma \psi(t + t^{\gamma+\varepsilon}) - t^\gamma \psi(t),$$

also

$$f(t + t^{\gamma+\varepsilon}) - f(t) > ct^{\gamma+\varepsilon} - C(t + t^{\gamma+\varepsilon})^\gamma - Ct^\gamma, \tag{5}$$

$$f(t + t^{\gamma+\varepsilon}) - f(t) < ct^{\gamma+\varepsilon} + C(t + t^{\gamma+\varepsilon})^\gamma + Ct^\gamma. \tag{6}$$

Die rechte Seite von (5) bezw. (6) ist im Falle $c > 0$ bezw. $c < 0$ für alle hinreichend grossen t positiv bezw. negativ, also nicht Null; daher muss zwischen t (excl.) und $t + t^{\gamma+\varepsilon}$ (incl.) mindestens ein l liegen. Wird $t = l_{n-1}$ genommen, so zeigt dies, dass wirklich von einer gewissen Stelle an das auf l_{n-1} folgende nächste l, d. h. l_n, höchstens gleich $l_{n-1} + l_{n-1}^{\gamma+\varepsilon}$ ist.

Diese Thatsache wird in § 4 angewendet werden.

§ 2.

Es ergiebt sich aus (2), wenn unter l_0 und $\psi(l_0)$ Null verstanden wird,

$$c_n = f(l_n) - f(l_{n-1}) = cl_n + l_n^\gamma \psi(l_n) - cl_{n-1} - l_{n-1}^\gamma \psi(l_{n-1}),$$

also für $R(\rho) > 0$

$$\varphi(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{l_n^{1+\rho}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cl_n - cl_{n-1}}{l_n^{1+\rho}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_n^\gamma \psi(l_n) - l_{n-1}^\gamma \psi(l_{n-1})}{l_n^{1+\rho}},$$

$$\varphi(\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(l_n - l_{n-1})}{l_n^{1+\rho}} + \sum_{n=1}^{\infty} l_n^\gamma \psi(l_n) \left(\frac{1}{l_n^{1+\rho}} - \frac{1}{l_{n+1}^{1+\rho}} \right). \tag{7}$$

§ 3.

Es soll zunächst gezeigt werden, dass die zweite unendliche Reihe in (7) für eine gewisse Umgebung jeder Stelle der Halbebene $R(\rho) > \gamma - 1$ gleichmässig convergiert. Da (bei geradlinigem Integrationsweg)

$$\frac{1}{l_n^{1+\rho}} - \frac{1}{l_{n+1}^{1+\rho}} = (1 + \rho) \int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{du}{u^{2+\rho}}$$

ist, genügt es für diesen Zweck, die gleichmässige Convergenz der unendlichen Reihe

$$(8) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} l_n^\gamma \phi(l_n) \int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{du}{u^{2+\rho}}$$

in der Halbebene $R(\rho) > \gamma - 1 + \varepsilon$ zu beweisen, wo ε eine beliebige positive Grösse bezeichnet.

Der absolute Betrag des allgemeinen Gliedes von (8) ist nach (3) für jene ρ

$$\leqq C l_n^\gamma \left| \int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{du}{u^{2+\rho}} \right| < C l_n^\gamma \int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{du}{u^{1+\gamma+\varepsilon}} < C \int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{u^\gamma du}{u^{1+\gamma+\varepsilon}} = C \int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{du}{u^{1+\varepsilon}}.$$

Da die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{du}{u^{1+\varepsilon}} = \int_{l_1}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\varepsilon}} = \frac{1}{\varepsilon l_1^\varepsilon}$$

convergiert, ist die Reihe (8), wie behauptet, für $R(\rho) > \gamma - 1 + \varepsilon$ gleichmässig convergent. Ihr Produkt mit $1 + \rho$, d. h. das zweite Glied der rechten Seite von (7) stellt also eine für $R(\rho) > \gamma - 1$ reguläre analytische Function dar.

§ 4.

Für $\gamma = 0$ ist hiermit der auf S. 197 ausgesprochene Satz schon bewiesen.

Für $c \gtrless 0$ reduziert sich die Aufgabe darauf, nachzuweisen, dass die für $R(\rho) > 0$ durch den Ausdruck

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(l_n - l_{n-1})}{l_n^{1+\rho}} - \frac{c}{\rho}$$

definierte Function in der Halbebene $R(\rho) > \gamma - 1$ regulär ist. Dies braucht natürlich nur für $c = 1$ bewiesen zu werden.

Es ist bei Integration auf geradlinigem Wege für $R(\rho) > 0$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{1}{l_1^\rho}\right) + \int_{l_1}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\rho}} = \frac{1}{\rho}\left(1 - \frac{1}{l_1^\rho}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{du}{u^{1+\rho}},$$

folglich

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{l_n - l_{n-1}}{l_n^{1+\rho}} - \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{l_1^\rho} - 1\right) + \frac{1}{l_1^\rho} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{l_n - l_{n-1}}{l_n^{1+\rho}} - \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{du}{u^{1+\rho}}\right).$$

Die beiden ersten Glieder der rechten Seite $\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{l_1^\rho} - 1\right)$ und $\frac{1}{l_1^\rho}$ stellen ganze transcendente Functionen von ρ dar; es braucht also nur bewiesen zu werden, dass die unendliche Reihe auf der rechten Seite eine für $R(\rho) > \gamma - 1$ reguläre analytische Function definiert. Da sich durch partielle Integration

$$-(1 + \rho) \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{u - l_{n-1}}{u^{2+\rho}} du = \left[\frac{u - l_{n-1}}{u^{1+\rho}}\right]_{l_{n-1}}^{l_n} - \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{du}{u^{1+\rho}}$$

$$= \frac{l_n - l_{n-1}}{l_n^{1+\rho}} - \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{du}{u^{1+\rho}}$$

ergiebt, ist für jenen Nachweis hinreichend, die gleichmässige Convergenz der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{u - l_{n-1}}{u^{2+\rho}} du \tag{9}$$

für $R(\rho) > \gamma - 1 + 2\varepsilon$ festzustellen, wo ε eine beliebige positive Grösse ist.

Nach (4) ist von einer gewissen Stelle an

$$l_n - l_{n-1} \leqq l_{n-1}^{\gamma+\varepsilon},$$

also

$$\left| \int\limits_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{u - l_{n-1}}{u^{2+\rho}}\, du \right| < \int\limits_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{l_n - l_{n-1}}{u^{1+\gamma+2\varepsilon}}\, du \leqq \int\limits_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{l_{n-1}^{\gamma+\varepsilon}}{u^{1+\gamma+2\varepsilon}}\, du < \int\limits_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{u^{\gamma+\varepsilon}}{u^{1+\gamma+2\varepsilon}}\, du$$

$$= \int\limits_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{du}{u^{1+\varepsilon}};$$

hieraus folgt die gleichmässige Convergenz der Reihe (9) für

$$R(\rho) > \gamma - 1 + 2\varepsilon$$

und damit der auf S. 197 ausgesprochene Satz.

Berlin, den 19[ten] October 1904.

Inhaltsverzeichniss. Table des matières.

	Seite. Pages.
BJERKNES, V., Recherche sur les champs de force hydrodynamiques	99—143
VON KOCH, HELGE, Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes	145—174
JENSEN, J. L. W. V., Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes	175—193
LANDAU, EDMUND, Über einen Satz von Herrn Phragmén	195—201

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

30:3

STOCKHOLM
BEIJERS BOKFÖRLAGSAKTIEBOLAG.
1906.

CENTRALTRYCKERIET, STOCKHOLM

BERLIN
MAYER & MÜLLER.

PARIS
A. HERMANN

ESSAIS SUR LE CALCUL DU NOMBRE DES CLASSES DE FORMES QUADRATIQUES BINAIRES AUX COEFFICIENTS ENTIERS

PAR

M. LERCH
À FRIBOURG.

CHAPITRE III.

Nous allons exposer les résultats de nature algébrique qui lient la théorie de l'équation binôme à la question qui nous occupe. GAUSS, dans la septième section des Disquisitiones, a montré l'existence de la décomposition suivante

$$4\frac{x^p - 1}{x - 1} = Y^2 \pm pZ^2,$$

p étant premier, et Y et Z des polynômes aux coefficients entiers. LEJEUNE-DIRICHLET [1] et JACOBI [2] ont généralisé les résultats de GAUSS au cas d'un discriminant fondamental positif, et ont découvert le rôle que jouent les polynômes Y et Z dans la détermination du nombre des classes d'un discriminant positif. CAUCHY [3] paraît le premier avoir reconnu nettement comment la décomposition de GAUSS généralisée dépende du discriminant (qui remplace alors le nombre p) supposé fondamental, positif ou négatif,

[1] *Sur la manière de résoudre l'équation $t^2 - pu^2 = 1$ au moyen des fonctions circulaires*, (Journal de Crelle, t. 17).

[2] *Über die Kreistheilung und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie* (Monatsberichte der kön. preussischen Akademie der Wiss. zu Berlin, 1837).

[3] Oeuvres de Cauchy, Iᵉ série, vol. 5, p. 84.

pair ou impair. Parmi les continuateurs de ces grands inventeurs nous sont connus les travaux de J. LIOUVILLE,[1] O. SCHEMMEL,[2] de MM. ALEXANDER BERGER[3] et H. WEBER.[4] Si l'on compare les résultats obtenus par ces éminents géomètres avec ce qu'on lira dans ce chapitre, on remarquera qu'il n'y a pas grande chose qui nous soit personnelle; cette partie présente en effet un caractère de compilation. Cependant certains détails que nous croyons neufs et notre manière d'exposition me paraissent mériter l'attention. D'ailleurs, nous aidant par les besoins de la théorie de KRONECKER, nous avons retrouvé tout ce qui est exposé ici avant de connaître les mémoires originaux qui sont venus après le travail de DIRICHLET.

1. Soit D un discriminant fondamental, positif ou négatif, Δ sa valeur absolue et observons que l'expression suivante

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D}{\nu}\right)+\left(\frac{D^2}{\nu}\right)\right]$$

a pour valeur l'unité, si $\left(\frac{D}{\nu}\right) = 1$, et s'annule dans tous les autres cas. L'expression

$$(1^a) \qquad A(x, D) = \prod_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}\right)^{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D}{\nu}\right)+\left(\frac{D^2}{\nu}\right)\right]}$$

est donc le produit des facteurs $x - e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}}$ qu'on obtient en prenant pour a tous les nombres de la suite $1, 2, 3, \ldots, \Delta - 1$ qui satisfont à la condition

$$\left(\frac{D}{a}\right) = 1;$$

donc

$$A(x, D) = \prod_{a}\left(x - e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}}\right).$$

[1] Journal de LIOUVILLE, 2e série, t. 2; 1857.

[2] *De multitudine formarum secundi gradus disquisitiones:* Vratislaviae, 1863.

[3] *Sur une application de la théorie des équations binômes à la sommation de quelques séries* (Nova Acta reg. Societatis scient. Upsaliensis, t. 13, 1886).

[4] Nachrichten der kön. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen, 1893.

Représentons de l'autre côté par b tous les entiers de la dite suite qui satisfont à la condition

$$\left(\frac{D}{b}\right) = -1;$$

alors la fonction

$$(1^b) \qquad B(x, D) = \prod_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}\right)^{\frac{1}{2}\left|-\left(\frac{D}{\nu}\right) + \left(\frac{D^2}{\nu}\right)\right|}$$

n'est autre chose que le produit

$$B(x, D) = \prod_b \left(x - e^{\frac{2b\pi i}{\Delta}}\right).$$

L'identité

$$0 = \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) = \sum \left(\frac{D}{a}\right) + \sum \left(\frac{D}{b}\right)$$

prouve que le nombre des éléments a est égal à celui des éléments b, et la valeur commune de ces nombres est, en employant l'écriture de GAUSS, évidemment $\frac{1}{2}\varphi(\Delta)$.

Les polynômes $A(x)$ et $B(x)$ sont donc du degré $\frac{1}{2}\varphi(\Delta)$.

Les racines des équations $A(x) = 0$ et $B(x) = 0$ constituent la totalité des racines primitives d'ordre Δ de l'unité, et par conséquent, on aura

$$(2) \qquad A(x)B(x) = F(x),$$

$F(x)$ désignant le polynôme irréductible aux coefficients rationnels qui s'annule pour $x = e^{\frac{2\pi i}{\Delta}}$. J'écrirai $F(x, \Delta)$ lorsqu'il faudra indiquer la valeur de Δ. On sait que

$$(3) \qquad F(x, \Delta) = \prod_d \left(x^{\frac{\Delta}{d}} - 1\right)^{\mu(d)},$$

le produit se rapportant à tous les diviseurs d du nombre Δ et $\mu(d)$ désignant les nombres de MOEBIUS. Par exemple

$$F(x, 15) = \frac{(x^{15} - 1)(x - 1)}{(x^3 - 1)(x^5 - 1)} = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1.$$

Des définitions (1^a) et (1^b) on tire l'équation formellement plus simple

$$(4)\qquad \frac{A(x)}{B(x)} = \prod_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}\right)^{\left(\frac{D}{\nu}\right)}$$

d'où en prenant les dérivées logarithmiques,

$$(5)\qquad \frac{A'(x)}{A(x)} - \frac{B'(x)}{B(x)} = \sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{1}{x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}}.$$

Posant, pour abréger,

$$\Phi(x) = \log\frac{A(x)}{B(x)},$$

l'équation (5) s'écrira

$$\Phi'(x) = \sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\nu}\right)\frac{1}{x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}},$$

J'y suppose $|x| < 1$ et j'emploie le développement en série géométrique

$$\frac{1}{e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}} - x} = \sum_{\mu=1}^{\infty} e^{-\frac{2\mu\nu\pi i}{\Delta}} x^{\mu-1},$$

d'où

$$\Phi'(x) = -\sum_{\mu=1}^{\infty} x^{\mu-1}\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\nu}\right)e^{-\frac{2\mu\nu\pi i}{\Delta}}.$$

Or, D étant un discriminant fondamental, on a

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\nu}\right)e^{-\frac{2\mu\nu\pi i}{\Delta}} = \left(\frac{D}{\mu}\right)\sqrt{D}\,\mathrm{sgn}\,D,$$

de sorte qu'en substituant, il vient

$$\Phi'(x) = -\sqrt{D}\,\mathrm{sgn}\,D\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{D}{\mu}\right)x^{\mu-1},$$

ou bien

$$(6)\qquad \frac{A'(x)}{A(x)} - \frac{B'(x)}{B(x)} = -\sqrt{D}\,\mathrm{sgn}\,D\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{D}{\mu}\right)x^{\mu-1}, \qquad (|x| < 1).$$

Quant à la fonction $\Phi(x)$ elle-même, l'intégration donne

$$\Phi(x) = \log c - \sqrt{D}\,\mathrm{sgn}\,D \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{D}{\mu}\right) \frac{x^\mu}{\mu},$$

où il faut encore déterminer la constante c. On a évidemment

$$\log c = \log \prod e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}\left(\frac{D}{\nu}\right)},$$

et puisque

$$\sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) \frac{\nu}{\Delta} = \begin{cases} 0 \text{ pour } D > 0, \\ -\frac{2}{\tau_\Delta} Cl(D) \text{ pour } D < 0, \end{cases}$$

on aura

$$c = \begin{cases} e^{-\frac{2\pi i}{8}} & \text{pour } D = -3, \\ -1 & \text{pour } D = -4, \\ 1 & \text{dans d'autres cas.} \end{cases}$$

Avec cette valeur de c, on a par conséquent la formule

$$\log \frac{A(x)}{B(x)} = \log c - \sqrt{D}\,\mathrm{sgn}\,D \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{D}{\mu}\right) \frac{x^\mu}{\mu}. \qquad (|x| < 1). \tag{7}$$

Quant à la fonction $F(x)$, il suffit de se rappeler la formule

$$F(x) = \prod_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}\right)^{\left(\frac{\Delta^2}{\nu}\right)}$$

pour en tirer

$$\log F(x) = \log c' - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m} \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{\Delta^2}{\nu}\right) e^{\frac{2m\nu\pi i}{\Delta}}.$$

En observant que l'on a $c' = 1$, puisque

$$F(0) = 1,$$

et que la somme

$$\sum_{1}^{\Delta-1} \left(\frac{\Delta^2}{\nu}\right) e^{\frac{2m\nu\pi i}{\Delta}} = -c_m$$

a pour valeur l'expression

$$\sum_\delta \mu(\Delta'\delta)\frac{\Delta_m}{\delta},$$

où Δ_m représente le plus grand commun diviseur des nombres m et Δ, puis Δ' signifie le quotient $\frac{\Delta}{\Delta_m}$ et δ parcourt tous les diviseurs du nombre Δ_m, on aura une série

$$\log F(x) = \sum_1^\infty \frac{c_m}{m} x^m$$

dont les coefficients sont des nombres rationnels, et en particulier les numérateurs c_m sont des nombres entiers.

Si Δ est impair, il n'admet aucun diviseur carré et il s'ensuit que $\mu(\Delta'\delta) = \mu(\Delta')\mu(\delta)$, et la formule

$$\Delta_m \sum_\delta \frac{\mu(\delta)}{\delta} = \varphi(\Delta_m)$$

fait voir que l'on a

$$c_m = -\mu(\Delta')\varphi(\Delta_m).$$

Si, au contraire, Δ est pair, on aura $c_m = 0$ pour m impair.

Des formules

$$\begin{aligned}\log A(x) &= \frac{1}{2}[\Phi(x) + \log F(x)] \\ &= \log\sqrt{c} + \sum_{m=1}^\infty \left(c_m - \left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\operatorname{sgn} D\right)\frac{x^m}{2m}, \\ \log B(x) &= \frac{1}{2}[-\Phi(x) + \log F(x)] \\ &= \log\sqrt{\frac{1}{c}} + \sum_{m=1}^\infty \left(c_m + \left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\operatorname{sgn} D\right)\frac{x^m}{2m}\end{aligned}$$

on tire

$$A(x) = \sqrt{c}\, e^{\sum\limits_{m=1}^\infty \left(c_m - \left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\operatorname{sgn} D\right)\frac{x^m}{2m}},$$

$$B(x) = \sqrt{\frac{1}{c}}\, e^{\sum\limits_{m=1}^\infty \left(c_m + \left(\frac{D}{m}\right)\sqrt{D}\operatorname{sgn} D\right)\frac{x^m}{2m}}.$$

Cela étant, observons qu'une expression exponentielle

$$e^{a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots}$$

se développe en une série

$$1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

dont les coefficients a_m s'expriment en fonction rationnelle des éléments $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ dont le rang ne dépasse pas celui de a_m.

Les développements suivant les puissances de x des fonctions $A(x)$ et $B(x)$ seront alors de la forme

$$A(x) = \sqrt{c}\,[1 + (a_1 + b_1\sqrt{D})x + (a_2 + b_2\sqrt{D})x^2 + \dots],$$

$$B(x) = \frac{1}{\sqrt{c}}[1 + (a_1 - b_1\sqrt{D})x + (a_2 - b_2\sqrt{D})x^2 + \dots],$$

les a_ν ainsi que les b_ν étant des nombres rationnels. Mais ces fonctions-là étant des fonctions entières, les séries se réduiront à un nombre fini de termes, et il s'ensuit que les coefficients dans les polynômes $\frac{A(x)}{\sqrt{c}}$ et $B(x)\sqrt{c}$ sont des nombres algébriques de la forme $a + b\sqrt{D}$. Cela a lieu pour les coefficients de $A(x)$ et $B(x)$ elles-mêmes, si $\Delta > 4$, car alors on a $c = 1$.

Si $\Delta = 4$, on a $D = -4$, $\sqrt{D} = 2i$, $c = -1$, $\sqrt{c} = \pm i$, et les coefficients $\frac{a+b\sqrt{D}}{\sqrt{c}}$, $(a + b\sqrt{D})\sqrt{c}$ seront alors $\pm\left(2b - \frac{a}{2}\sqrt{D}\right)$, $\pm\left(-2b + \frac{a}{2}\sqrt{D}\right)$ et il est clair que la forme $a + b\sqrt{D}$ reste conservée.

La même chose a lieu dans le cas de $\Delta = 3$, $D = -\Delta$, puisque $\sqrt{c}$ est ici aussi de la forme $\alpha + \beta i\sqrt{D}$.

Donc, dans tous les cas, les coefficients des polynômes $A(x)$ et $B(x)$ appartiennent au domaine de rationalité $(1, \sqrt{D})$. Mais ils sont des sommes de produits des nombres algébriques entiers tels que $e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}$, et il faut qu'ils soient eux-mêmes des nombres algébriques entiers.

Deux nombres algébriques entiers de la forme

$$a + b\sqrt{D} \quad \text{et} \quad a - b\sqrt{D}$$

ont pour somme et pour différences $2a$ et $2b\sqrt{D}$ qui doivent aussi être

entières. Si D est impair, il faut donc que $2a = m$ et $2b = n$ soient des entiers, et on aura la forme

$$a + b\sqrt{D} = \frac{m + n\sqrt{D}}{2},$$

m et n étant deux entiers ordinaires.

En cas de D pair, on peut rendre $(2b\sqrt{D})^2 = 4b^2D$ entier en supposant $16b^2$ entier, c'est à dire en prenant $b = \frac{1}{4}n$, n étant un entier. Si celui-ci est impair, on aura en faisant $2a = m$

$$a + b\sqrt{D} = \frac{m + n\sqrt{\frac{1}{4}D}}{2}, \qquad a - b\sqrt{D} = \frac{m - n\sqrt{\frac{1}{4}D}}{2};$$

le produit de ces expressions devant être un entier ordinaire

$$\frac{1}{4}\left(m^2 - n^2\frac{D}{4}\right),$$

on a la congruence (n étant impair)

$$m^2 \equiv \frac{D}{4} \pmod 4$$

chose impossible pour un discriminant fondamental. Donc toujours les deux nombres $2a$ et $2b$ sont entiers.

Les coefficients des polynômes $2A(x)$ et $2B(x)$ étant de la forme $m \pm n\sqrt{D}$ où m et n sont des entiers ordinaires, on peut séparer les parties contenant le radical $\sqrt{D}$ et il vient

$$2A(x) = Y(x) \pm \sqrt{D}\,Z(x),$$
$$2B(x) = Y(x) \mp \sqrt{D}\,Z(x),$$

Y et Z signifiant deux polynômes aux coefficients entiers. Le double signe qui figure aux seconds membres devient déterminé, si l'on choisit le signe du terme le plus élevé dans le polynôme $Z(x)$. On convient de prendre le coefficient de la puissance de x la plus élevée dans le polynôme $Z(x)$ positif.

Des équations (1^a) et (1^b) résulte que l'on a

$$A(x) = x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} - \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \frac{1}{2}\left[\left(\frac{D}{\nu}\right) + \left(\frac{D^2}{\nu}\right)\right] e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}} x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} + \ldots,$$

$$B(x) = x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} - \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \frac{1}{2}\left[-\left(\frac{D}{\nu}\right) + \left(\frac{D^2}{\nu}\right)\right] e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}} x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} + \ldots,$$

d'où

$$A(x) + B(x) = 2x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} - \sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D^2}{\nu}\right) e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}} x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} + \ldots,$$

$$A(x) - B(x) = -\sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}} x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} + \ldots.$$

La dernière expression commençant par le terme en $x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1}$ dont le coefficient est

$$-\sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\nu}\right) e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}} = -\sqrt{D},$$

l'équation

$$A(x) - B(x) = \pm\sqrt{D}Z(x)$$

fait voir que le signe $\pm$ est $-$. On a donc en définitif

$$(8) \qquad \begin{cases} 2A(x, D) = Y(x, D) - \sqrt{D}Z(x, D), \\ 2B(x, D) = Y(x, D) + \sqrt{D}Z(x, D). \end{cases}$$

Les fonctions Y et Z sont de la forme

$$(9) \qquad \begin{cases} Y(x) = 2x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} + a_1 x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} + a_2 x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-2} + \ldots, \\ Z(x) = x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} + b_1 x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-2} + \ldots; \end{cases}$$

remarquons que le coefficient a_1 est

$$a_1 = -\sum_{\nu=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D^2}{\nu}\right) e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}},$$

c'est à dire qu'il est identique au coefficient de $x^{\varphi(\Delta)-1}$ dans la fonction $F(x, \Delta)$.

L'équation

$$A(x)B(x) = F(x)$$

s'écrira [1]

$$Y^2(x, D) - DZ^2(x, D) = 4F(x, \Delta). \tag{10}$$

Cette identité caractérise complètement les fonctions Y et Z, si l'on ajoute que leurs coefficients soient rationnels, celui de la plus haute puissance en Z étant supposé positif.

Car si l'on avait une autre décomposition analogue

$$4F = Y_1^2 - DZ_1^2,$$

la fonction $Y_1 - Z_1\sqrt{D}$ s'évanouirait pour certaines racines de l'une des deux équations

$$Y \pm Z\sqrt{D} = 0.$$

Le plus grand commun diviseur des premiers membres

$$Y_1 - Z_1\sqrt{D}, \qquad Y \pm Z\sqrt{D}$$

serait un polynôme de la forme $Y_2 - Z_2\sqrt{D}$, Y_2 et Z_2 étant deux polynômes aux coefficients rationnels des degrés inférieurs à $\frac{1}{2}\varphi(\Delta)$. Le polynôme aux coefficients rationnels

$$(Y_2 - Z_2\sqrt{D})(Y_2 + Z_2\sqrt{D}) = Y_2^2 - DZ_2^2$$

et du degré inférieur à $\varphi(\Delta)$ s'annulant pour une racine primitive de l'unité, la fonction $F(x)$ devrait être réductible, chose impossible. Donc les polynômes Y et Z sont complètement définis par l'identité (10).

2. Les équations (8) donnent tout de suite

$$\frac{A'(x)}{A(x)} - \frac{B'(x)}{B(x)} = 2\sqrt{D}\,\frac{Z(x)Y'(x) - Y(x)Z'(x)}{Y^2(x) - DZ^2(x)}$$

[1] Le procédé le plus rapide pour le calcul des coefficients des polynômes Y et Z a été donné par Legendre (*Mémoire sur la détermination des fonctions Y et Z etc.*, Mémoires de l'acad., t. 11, 1830); il repose sur ce que les sommes de puissances semblables des racines de $A(x) = 0$ et $B(x) = 0$ sont données immédiatement; les coefficients s'obtiennent à l'aide des formules de Newton.

ou en faisant usage de (10),

$$\frac{A'(x)}{A(x)} - \frac{B'(x)}{B(x)} = \sqrt{D}\,\frac{Z(x)Y'(x) - Y(x)Z'(x)}{2F(x)}. \tag{11}$$

On parvient à une autre représentation du premier membre, si l'on emploie le développement (6).

La série qui y figure

$$S = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{D}{\mu}\right) x^{\mu-1}$$

peut se transformer en faisant $\mu = \rho + \Delta\nu$ ($\rho = 1, 2, \ldots, \Delta$; $\nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty$); on a

$$\left(\frac{D}{\mu}\right) = \left(\frac{D}{\rho}\right)$$

et par conséquent

$$S = \sum_{\rho=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\rho}\right) x^{\rho-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} x^{\Delta\nu} = \frac{1}{1 - x^{\Delta}} \sum_{\rho=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\rho}\right) x^{\rho-1}.$$

Nous sommes ainsi amenés à introduire la fonction entière

$$Q(x) = \sum_{\rho=1}^{\Delta-1} \left(\frac{D}{\rho}\right) x^{\rho} = Q(x, D). \tag{12}$$

Nous aurons alors

$$\frac{A'(x)}{A(x)} - \frac{B'(x)}{B(x)} = \frac{\sqrt{D}\,\operatorname{sgn} D}{x(x^{\Delta} - 1)}\,Q(x). \tag{13}$$

En comparant avec (11) nous aurons

$$Q(x) \operatorname{sgn} D = \frac{1}{2}\, x\, \frac{x^{\Delta} - 1}{F(x)} \left[Z(x)Y'(x) - Y(x)Z'(x)\right]. \tag{14}$$

Représentons maintenant par Δ_ν tous les diviseurs du nombre Δ plus petits que Δ, y compris l'unité, et formons le produit [1]

$$\prod_{\nu} F(x, \Delta_\nu)$$

[1] Remarquons qu'il faut prendre, p. ex.

$F(x, 1) = x - 1, \qquad F(x, 2) = x + 1, \qquad F(x, 4) = x^2 + 1,$ etc.

de tous les polynômes $F(x, \Delta_\nu)$ correspondants. Alors le quotient

$$\frac{x^\Delta - 1}{F(x)}$$

aura pour valeur $\Pi F(x, \Delta_\nu)$ et l'équation (14) s'écrira comme il suit

$$(14^*) \qquad Q(x)\,\mathrm{sgn}\,D = \frac{1}{2}x[Z(x)Y'(x) - Y(x)Z'(x)]\prod_\nu F(x, \Delta_\nu).$$

Étant connues les fonctions $F(x)$ et $Q(x)$, on pourra caractériser les polynômes Y et Z d'une manière purement algébrique par une congruence que nous allons établir.

J'observe d'abord que pour les valeurs $x = e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}$ où ν est premier avec Δ, la quantité $Q^2(x)$ se réduit à D, de sorte que le polynôme $Q^2(x) - D$ est divisible par $F(x)$. Le quotient ayant de même les coefficients entiers, on aura la congruence

$$(15) \qquad Q^2(x) \equiv D \ [\mathrm{mod}\ F(x)].$$

Cela étant, j'observe que pour $x = e^{\frac{2\pi i}{\Delta}}$ on a

$$Q(x) = \sqrt{D}, \qquad Y(x) - \sqrt{D}Z(x) = 0,$$

de sorte que la fonction entière aux coefficients rationnels

$$Y(x) - Q(x)Z(x)$$

s'annule pour $x = e^{\frac{2\pi i}{\Delta}}$; elle doit donc admettre le diviseur irréductible $F(x)$, d'où la congruence

$$(16) \qquad Y(x) \equiv Q(x)Z(x) \ [\mathrm{mod}\ F(x)].$$

Pour prouver que cette congruence à deux inconnues algébriques Y et Z n'admet qu'une seule solution dont les développements soient de la forme (9), élevons au carré les deux membres et faisons usage de (15); on aura

$$Y^2 \equiv DZ^2 \ [\mathrm{mod}\ F(x)].$$

La fonction entière

$$\frac{Y^2 - DZ^2}{F(x)}$$

étant, d'après (9), du degré zéro, elle est une constante qui n'est autre chose que le nombre 4; on a donc

$$Y^2 - DZ^2 = 4F,$$

identité dont on sait qu'elle est caractéristique pour les fonctions Y et Z.

3. Revenons sur l'équation (14*). Le produit qui y figure

$$\Pi F(x, \Delta_\nu)$$

contient le facteur $F(x, 1) = x - 1$, et le quotient que j'appelle $G(x)$ ne s'annule plus pour $x = 1$. On aura

(a) $$G(x) = \frac{x^\Delta - 1}{(x-1)F(x)},$$

(b) $$Q(x)\operatorname{sgn} D = \frac{1}{2}x(x-1)G(x)[Z(x)Y'(x) - Y(x)Z'(x)].$$

En différentiant et prenant $x = 1$, il vient

$$Q'(1)\operatorname{sgn} D = G(1)\frac{ZY' - YZ'}{2},$$

en mettant pour un moment $Y^{(a)}$ et $Z^{(a)}$ au lieu de $Y^{(a)}(1)$ et $Z^{(a)}(1)$. L'équation (a) donne ensuite

$$G(1) = \frac{\Delta}{F(1)},$$

et nous savons que $F(1) = 1$ pour Δ composé, mais que $F(1) = \Delta$ pour Δ premier ou puissance d'un nombre premier. Observant que $\Delta \operatorname{sgn} D = D$, nous aurons donc

$$\sum_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(\frac{D}{\rho}\right)\rho = D\frac{ZY' - YZ'}{2F(1)}.$$

Dans le cas de $D > 0$ le premier membre s'évanouit et nous aurons

$$ZY' - YZ' = 0.$$

Nous verrons plus tard que, pour D positif, les deux quantités $Y(1)$ et $Z(1)$ sont différentes de zéro, de sorte qu'il vient

(17) $$\frac{Y(1)}{Z(1)} = \frac{Y'(1)}{Z'(1)}, \quad (D > 0).$$

Soit en second lieu $D = -\Delta$ un discriminant négatif; on a comme on sait

$$\sum_{\rho=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\rho}\right)\rho = -\frac{2\Delta}{\tau}\, Cl(-\Delta),$$

ensuite la relation

$$Y^2 + \Delta Z^2 = 4F, \qquad (x = 1),$$

fait connaître l'une des deux quantités Y et Z.

Si le nombre Δ est composé et plus grand que huit on a $F = 1$, et par conséquent $Z = 0$. On a donc

(c) $$Z(1, -\Delta) = 0, \qquad Y(1, -\Delta) = \pm 2 \quad (\Delta \text{ composé} > 8).$$

et il s'ensuit que

(d) $$-Y(1, -\Delta)Z'(1, -\Delta) = 2Cl(-\Delta), \quad (\Delta \text{ composé} > 8).$$

Cette équation se simplifiera plus tard, lorsque nous aurons déterminé le signe de la quantité $Y(1)$. Dans le cas de $\Delta = 8$ on a

$$F(1) = 2, \qquad Y(1) = 0, \qquad Z(1) = 1, \qquad Y'(1) = 4,$$

d'où il suit

$$Cl(-8) = \frac{Z(1)Y'(1)}{4} = 1.$$

Pour $\Delta = 4$ on a de même

$$F(1) = 2, \quad \text{mais} \quad Z'(x) = 0, \qquad Y'(x) = 2,$$

et il vient

$$Z(1)Y'(1) = 4\frac{2}{\tau}\, Cl(-4) = 2.$$

Si en second lieu Δ est premier, on a $F(1) = \Delta$ et nous aurons, pour $x = 1$,

$$Y^2 + \Delta Z^2 = 4\Delta;$$

cela exige que Y admet le facteur Δ, de sorte qu'on aura $Y = \Delta y$; il vient

$$Z^2 + \Delta y^2 = 4,$$

de sorte que pour $\Delta > 3$, on aura $y = 0$, $Z = \pm 2$.

Par conséquent, ces formules

(c′) $$Y(1, -\Delta) = 0, \qquad Z(1, -\Delta) = \pm 2, \quad (\Delta \text{ premier} > 3)$$

donnent

(d′) $$Z(1, -\Delta)\, Y'(1, -\Delta) = 2\Delta\, Cl(-\Delta).$$

Nous parviendrons plus tard à la détermination du signe de $Z(1)$.

4. Quant aux propriétés des fonctions $A(x)$ et $B(x)$ remarquons d'abord que les définitions donnent

$$A(0) = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} \prod_a e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}}, \qquad B(0) = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} \prod e^{\frac{2b\pi i}{\Delta}}$$

$$\left(a, b = 1, 2, 3, \ldots, \Delta - 1;\ \left(\frac{D}{a}\right) = 1,\ \left(\frac{D}{b}\right) = -1\right),$$

d'où l'on tire aisément, pour $D > 0$, les résultats $A(0) = B(0) = 1$, ou bien

(18ᵃ) $$Y(0) = 2, \qquad Z(0) = 0, \quad \text{pour} \quad D > 0.$$

Dans le cas de discriminant négatif on trouve d'abord

$$\frac{2}{\Delta}\Sigma a = \frac{1}{2}\varphi(\Delta) - \frac{2}{\tau}Cl(-\Delta), \qquad \frac{2}{\Delta}\Sigma b = \frac{1}{2}\varphi(\Delta) + \frac{2}{\tau}Cl(-\Delta);$$

on aura donc, pour $\Delta > 4$, $D = -\Delta$:

$$A(0) = B(0) = (-1)^{Cl(-\Delta)},$$

mais si $\Delta = 3$ ou 4 on aura respectivement $\tau = 6$ et $\tau = 4$, de sorte qu'il vient comme cela se voit d'ailleurs directement:

$$\text{pour } D = -3: \qquad A(0) = e^{-\frac{\pi i}{3}}, \qquad B(0) = e^{\frac{\pi i}{3}},$$

$$\text{pour } D = -4: \qquad A(0) = -i, \qquad B(0) = i.$$

Il s'ensuit, en résumé, les formules suivantes:

(18ᵇ) $$\begin{cases} Y(0) = 2(-1)^{Cl(-\Delta)}, & Z(0) = 0 \text{ pour } D = -\Delta, \quad \Delta > 4, \\ Y(0) = Z(0) = 1 & \text{pour } D = -3, \\ Y(0) = 0, & Z(0) = 1 \text{ pour } D = -4. \end{cases}$$

En observant que, pour $\Delta > 8$, le nombre $Cl(-\Delta)$ est impair ou pair selon que Δ est premier ou composé, ce dernier résultat peut s'énoncer comme il suit:

$$(18^c) \qquad Y(0) = \begin{cases} -2, & \text{pour } \Delta \text{ premier et pour } \Delta = 8, \\ 2, & \text{pour } \Delta \text{ composé } > 8; \end{cases}$$

$$Z(0) = 0 \text{ pour } \Delta > 4; \qquad D = -\Delta.$$

Dans la formule (1^a) changeons x en $\frac{1}{x}$; nous aurons

$$A\left(\frac{1}{x}\right) = \left(-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} \prod_a e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}} \prod_a \left(x - e^{-\frac{2a\pi i}{\Delta}}\right).$$

Dans le cas de D positif, on a comme nous venons de le remarquer

$$(-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} \prod e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}} = 1,$$

puis les quantités

$$e^{-\frac{2a\pi i}{\Delta}} = e^{\frac{2\pi i(\Delta - a)}{\Delta}}$$

reconstituent, dans leur ensemble, les quantités $e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}}$; le second membre de notre formule sera donc

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)}} A(x),$$

ce qui donne

$$x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} A\left(\frac{1}{x}\right) = A(x),$$

ce qui donne, pour un discriminant fondamental positif D, les relations connues

$$(19^a) \qquad x^{\frac{1}{2}\varphi(D)} Y\left(\frac{1}{x}, D\right) = Y(x, D), \qquad x^{\frac{1}{2}\varphi(D)} Z\left(\frac{1}{x}, D\right) = Z(x, D).$$

Dans le cas d'un discriminant négatif $D = -\Delta$ où $\Delta > 4$, nous savons que

$$(-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} \prod_a e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}} = (-1)^{Cl(-\Delta)},$$

puis les quantités $e^{-\frac{2a\pi i}{\Delta}} = e^{\frac{2\pi i(\Delta-a)}{\Delta}}$ reproduisent, dans leur ensemble, les quantités $e^{\frac{2b\pi i}{\Delta}}$, et on aura donc

$$x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} A\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^{Cl(-\Delta)} B(x),$$

d'où il suit

$$x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} Y\left(\frac{1}{x}\right) = (-1)^{Cl(-\Delta)} Y(x),$$

$$x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} Z\left(\frac{1}{x}\right) = -(-1)^{Cl(-\Delta)} Z(x).$$

ou bien

$$(19^b) \quad \begin{cases} x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} Y\left(\frac{1}{x}, -\Delta\right) = \varepsilon Y(x, -\Delta), \\ x^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} Z\left(\frac{1}{x}, -\Delta\right) = -\varepsilon Z(x, -\Delta), \qquad \Delta > 4, \end{cases}$$

où $\varepsilon = 1$, si Δ est un nombre composé supérieur à 8, et $\varepsilon = -1$, si Δ est un nombre premier ou si $\Delta = 8$.

Dans les équations (19^a) et (19^b) je pose $x = i$, en excluant les cas particuliers $D = -3, -4, -8$.

Si le discriminant $D = -\Delta$ est négatif et composé, on a alors

$$\frac{1}{2}\varphi(\Delta) \equiv 0 \pmod 4,$$

le discriminant étant fondamental, bien entendu.

Si, en second lieu, le discriminant D est positif et composé, on a, en général,

$$\frac{1}{2}\varphi(D) \equiv 0 \pmod 4,$$

deux exceptions étant à signaler. D'abord pour $D = 4P$, P étant premier, naturellement de la forme $4k+3$, puis si $D = p_1 p_2$, les deux nombres premiers p_1 et p_2 ayant la forme $4k+3$. Dans ces cas exceptionnels on a

$$\frac{1}{2}\varphi(D) \equiv 2 \pmod 4.$$

On a par conséquent les faits suivants à remarquer:

Si D est un discriminant fondamental positif qui n'est ni premier ni le quadruple d'un nombre premier, ni le produit de deux nombres premiers de la forme $4k+3$, on aura

$$Y(-i, D) = Y(i, D), \qquad Z(-i, D) = Z(i, D).$$

Les quantités $Y(i)$ et $Z(i)$ seront donc *réelles*.

Dans les cas de $D = 4p$, $D = p_1 p_2 (p \equiv p_1 \equiv p_2 \equiv 3 \pmod 4)$ on a, au contraire,

$$Y(-i) = -Y(i), \qquad Z(-i) = -Z(i),$$

d'où il suit que les quantités $Y(i)$ et $Z(i)$ sont ou purement imaginaires ou nulles, en partie.

Pour un discriminant négatif composé différent de -4 et -8, on a, d'après (19^b)

$$Y(-i) = Y(i), \qquad Z(-i) = -Z(i),$$

donc $Y(i)$ est réel et $Z(i)$ purement imaginaire ou nul.

Passons aux discriminants premiers.

Si $D > 0$ est premier, on aura

$$Y(-i) = (-1)^{\frac{D-1}{4}} Y(i), \qquad Z(-i) = (-1)^{\frac{D-1}{4}} Z(i),$$

d'où il suit que $Y(i)$ et $Z(i)$ seront réelles ou purement imaginaires selon que $D \equiv 1 \pmod 8$ ou $D \equiv 5 \pmod 8$; les cas des valeurs égales à zéro étant sous-entendus comme des valeurs réelles ou imaginaires.

Si le discriminant est négatif et premier $-\Delta$, le nombre

$$\frac{1}{2}\varphi(\Delta) = \frac{1}{2}(\Delta - 1)$$

est impair, et les quantités $Y(i)$ et $Z(i)$ seront essentiellement complexes; mais on trouve aisément

$$Y(i) = \left(1 + (-1)^{\frac{\Delta+1}{4}} i\right) M, \qquad Z(i) = \left(1 - (-1)^{\frac{\Delta+1}{4}} i\right) N,$$

M et N étant des entiers réels.

5. Passons à la détermination des quantités $Y(1)$ et $Z(1)$ pour un discriminant négatif; nous savons que, si Δ est composé et plus grand que 8, on a $Z(1)=0$, $Y(1)=\pm 2$; il ne reste qu'à déterminer le signe de cette dernière quantité qui est égale à $2A(1)$. La définition (1^*) donne immédiatement

$$A(1)=\prod_a\left(1-e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}}\right),$$

et si l'on remplace la quantité $1-e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}}$ par sa valeur $-2ie^{\frac{a\pi i}{\Delta}}\sin\frac{a\pi}{\Delta}$, nous aurons

(a) $$A(1)=(-i)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)}e^{\frac{\pi i}{\Delta}\Sigma a}\prod_a\left(2\sin\frac{a\pi}{\Delta}\right).$$

La quantité réelle et positive

$$\prod_a\left(2\sin\frac{a\pi}{\Delta}\right)$$

représente la valeur absolue de $A(1)$ et sera, par conséquent, égale à un, si Δ est composé. Il s'ensuit

$$A(1)=(-i)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)}e^{\frac{\pi i}{\Delta}\Sigma a}.$$

Or nous savons que (puisque ici $\tau=2$)

$$\frac{1}{\Delta}\Sigma a=\frac{1}{4}\varphi(\Delta)-\frac{1}{2}Cl(-\Delta),$$

donc

$$A(1)=(-i)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)}e^{\frac{\pi i}{4}\varphi(\Delta)-\frac{\pi i}{2}Cl(-\Delta)},$$

ou bien, $\frac{1}{2}Cl(-\Delta)$ étant un entier pour le discriminant composé,

$$A(1)=(-1)^{\frac{1}{2}Cl(-\Delta)}.$$

Supposons en second lieu Δ premier. Dans ce cas on a

$$Y(1)=0,\qquad Z(1)=\pm 2,\qquad A(1)=-\frac{i\sqrt{\Delta}}{2}Z(1).$$

La valeur absolue de la quantité $A(1)$ sera alors $\sqrt{\Delta}$ et la formule (a) donne

$$\frac{A(1)}{|A(1)|} = (-i)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} e^{\frac{\pi i}{\Delta}\Sigma a};$$

cette quantité étant égale à $-\frac{1}{2}iZ(1)$, on conclut

$$Z(1) = 2(-i)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} e^{\frac{\pi i}{\Delta}\Sigma a},$$

ou bien

$$Z(1) = 2(-i)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)-1} e^{\frac{\pi i}{4}\varphi(\Delta)-\frac{\pi i}{2}Cl(-\Delta)},$$

ce qui se simplifie comme il suit

$$Z(1) = 2(-1)^{\frac{Cl(-\Delta)-1}{2}}.$$

On a donc les résultats suivants:

$$(20^a) \qquad Z(1, -\Delta) = 2(-1)^{\frac{1}{2}[Cl(-\Delta)-1]}, \qquad Y(1, -\Delta) = 0,$$
$$(\Delta \text{ premier} > 3),$$

$$(20^b) \qquad Y(1, -\Delta) = 2(-1)^{\frac{1}{2}Cl(-\Delta)}, \qquad Z(1, -\Delta) = 0,$$
$$(\Delta \text{ composé} > 8).$$

En substituant ces valeurs dans les formules (d) et (d') du n° 3, nous aurons ces formes définitives des résultats y indiqués

$$(21^a) \qquad Y'(1) = (-1)^{\frac{1}{2}[Cl(-\Delta)-1]}\Delta\, Cl(-\Delta); \quad (\Delta \text{ premier} > 3),$$

$$(21^b) \qquad Z'(1) = -(-1)^{\frac{1}{2}Cl(-\Delta)} Cl(-\Delta); \quad (\Delta \text{ composé} > 8).$$

En représentant par H le nombre impair $Cl(-\Delta)$ dans le cas de Δ premier, nous aurons

$$\Delta \equiv -1, \qquad (-1)^{\frac{1}{2}(H-1)} H \equiv 1 \pmod 4,$$

et par conséquent

$$(21^c) \qquad Y'(1) \equiv -1 \pmod 4, \qquad (\Delta \text{ premier} > 3).$$

Si Δ n'est aucune des valeurs exceptés, $3, 4, 8$, on aura toujours $F(-1) = 1$, ce qui donne des résultats plus simples pour la valeur particulière $x = -1$. L'équation

$$Y^2(-1) + \Delta Z^2(-1) = 4$$

donne

$$Z(-1) = 0, \qquad Y(-1) = \pm 2 = 2A(-1).$$

La formule immédiate

$$A(-1) = \prod_a \left(-1 - e^{\frac{2a\pi i}{\Delta}}\right)$$

donne d'abord

$$A(-1) = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} e^{\frac{\pi i}{\Delta}\Sigma a} \prod_a \left(2\cos\frac{a\pi}{\Delta}\right);$$

la valeur absolue de cette quantité devant être un, on conclut, en substituant la valeur connue de Σa,

$$A(-1) = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} e^{\frac{\pi i}{4}\varphi(\Delta) - \frac{\pi i}{2} Cl(-\Delta)} (-1)^N,$$

N désignant le nombre des éléments a plus grands que $\frac{1}{2}\Delta$. Évidemment

$$2N = \sum_{\nu=\left[\frac{\Delta}{2}\right]+1}^{\Delta-1}{}^{*} \left(1 + \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\right),$$

ν parcourant des nombres premiers avec Δ; il s'ensuit

$$2N = \frac{1}{2}\varphi(\Delta) + \sum_{\nu=\left[\frac{\Delta}{2}\right]+1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) = \frac{1}{2}\varphi(\Delta) - \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{2}\Delta\right]} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)$$

ou d'après une formule connue,

$$N = \frac{1}{4}\varphi(\Delta) - \frac{1}{2}\left[2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right] Cl(-\Delta).$$

On a donc

$$(-1)^N = e^{-\frac{\pi i}{4}\varphi(\Delta) + \frac{\pi i}{2}\left[2 - \left(\frac{2}{\Delta}\right)\right] Cl(-\Delta)}$$

et la formule obtenue plus haut devient

$$A(-1) = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(\Delta)} e^{\frac{\pi i}{\tau}\left[1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right] Cl(-\Delta)}. \tag{b}$$

Si Δ est premier et plus grand que 3, on a $\tau = 2$ et il vient

$$A(-1) = -(-1)^{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)} = -\left(\frac{2}{\Delta}\right).$$

Si Δ est composé et supérieur à 8, le nombre des classes est pair et nous aurons

$$A(-1) = 1;$$

une exception pourra se présenter pour les discriminants pairs, car alors $\left(\frac{2}{\Delta}\right) = 0$, et la formule (b) donnera

$$A(-1) = (-1)^{\frac{1}{2}Cl(-\Delta)}, \qquad (\Delta \text{ pair } > 8).$$

Or de la théorie de la repartition des classes en genres on sait que le nombre $\frac{1}{2}Cl(-\Delta)$ ne sera impair que si le discriminant a la forme $-4m$ ou $-8m$, m étant un nombre premier. Dans le cas de $\Delta = 4m$, le nombre premier impair m est un discriminant positif, et la formule (45) du chapitre II donne

$$\frac{1}{2}Cl(-4m) = \sum_{a=1}^{\left[\frac{1}{4}m\right]} \left(\frac{m}{a}\right);$$

le second membre se compose de $\frac{m-1}{4}$ unités, positives ou négatives, et par conséquent

$$\frac{1}{2}Cl(-4m) \equiv \frac{m-1}{4} \pmod 2,$$

pourvu que m soit premier. On vérifie aisément que

$$(-1)^{\frac{m-1}{4}} = \left(\frac{2}{m}\right),$$

et le résultat obtenu plus haut devient

$$A(-1, -4m) = \left(\frac{2}{m}\right), \quad (m \text{ premier}).$$

Soit maintenant $\Delta = 8m$, les deux cas $m \equiv 1$ et $m \equiv 3 \pmod 4$ sont possibles et il faut les distinguer.

Pour $m \equiv 1 \pmod 4$ la formule (47) du chap. II donne

$$\frac{1}{2}Cl(-8m) = \sum_{1}^{\left[\frac{1}{8}m\right]} \left(\frac{m}{\nu}\right) - \sum_{\left[\frac{3}{8}m\right]+1}^{\left[\frac{1}{2}m\right]} \left(\frac{m}{\nu}\right),$$

et par conséquent

$$\text{(c)} \qquad \frac{1}{2}Cl(-8m) \equiv \left[\frac{m}{8}\right] + \left[\frac{m}{2}\right] - \left[\frac{3m}{8}\right] \pmod 2.$$

Dans le deuxième cas où $m \equiv 3 \pmod 4$ la formule (42) du même chapitre donne

$$\frac{1}{2}Cl(-8m) = \sum_{\left[\frac{1}{8}m\right]+1}^{\left[\frac{3}{8}m\right]} \left(\frac{-m}{\nu}\right)$$

d'où il suit

$$\text{(d)} \qquad \frac{1}{2}Cl(-8m) \equiv \left[\frac{3m}{8}\right] - \left[\frac{m}{8}\right] \pmod 2.$$

Au moyen de ces résultats (c) et (d) on trouve le tableau suivant (m étant toujours supposé premier) des congruences au module deux,

$$\frac{1}{2}Cl(-8m) \equiv \begin{cases} 0, & \text{pour } m = 8k+1, \\ 1, & \text{pour } m = 8k+5, \\ 1, & \text{pour } m = 8k+3, \\ 0, & \text{pour } m = 8k+7, \end{cases}$$

ce qui se résume par l'équation

$$(-1)^{\frac{1}{2}Cl(-8m)} = \left(\frac{2}{m}\right), \quad (m \text{ premier}).$$

Nous avons par conséquent le résultat suivant:

Pour le discriminant fondamental négatif $-\Delta$, différent de -3, -4, -8, ont lieu des formules

$$
(22)\qquad \left\{
\begin{aligned}
& Z(-1\,,\,-\Delta) = 0, \\
& \frac{1}{2}\,Y(-1\,,\,-\Delta) = \begin{cases}
-\left(\dfrac{2}{\Delta}\right), & \Delta \text{ premier,} \\
\left(\dfrac{2}{m}\right), & \Delta = 4m \text{ ou } 8m,\ m \text{ premier,} \\
1\ , & \Delta \text{ composé, des autres formes.}
\end{cases}
\end{aligned}
\right.
$$

6. Une question des plus intéressantes serait d'obtenir des relations entre les fonctions Y et Z provenant des discriminants différents. Nous allons montrer comment ces fonctions peuvent s'obtenir pour un discriminant produit, si on les connait pour les discriminants facteurs.

Soient à cet effet D_1 et D_2 deux discriminants fondamentaux premiers entre eux, Δ_1 et Δ_2 leur valeurs absolues; le produit $D_1 D_2$ sera, lui aussi, un discriminant fondamental et l'on aura

$$A(x\,,\,D_1 D_2) = \prod_{\nu=1}^{\Delta_1\Delta_2}\left(x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta_1\Delta_2}}\right)^{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D_1D_2}{\nu}\right)+\left(\frac{D_1D_2}{\nu}\right)^2\right]}.$$

Le nombre $a = \Delta_1 + \Delta_2$ est premier avec $\Delta_1\Delta_2$, et on pourra donc remplacer ν par $a\nu$; il vient de la sorte

$$A(x\,,\,D_1 D_2) = \prod_{\nu=1}^{\Delta_1\Delta_2}\left(x - e^{\frac{2a\nu\pi i}{\Delta_1\Delta_2}}\right)^{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D_1D_2}{a\nu}\right)+\left(\frac{D_1D_2}{a\nu}\right)^2\right]}.$$

L'un des deux discriminants, p. ex. D_1, sera toujours impair; on aura alors

$$\left(\frac{D_1}{\Delta_2}\right) = \left(\frac{\Delta_2}{D_1}\right) = \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right),$$

et l'expression

$$\left(\frac{D_1 D_2}{a}\right) = \left(\frac{D_1}{\Delta_1+\Delta_2}\right)\left(\frac{D_2}{\Delta_1+\Delta_2}\right) = \left(\frac{D_1}{\Delta_2}\right)\left(\frac{D_2}{\Delta_1}\right)$$

sera égale à la suivante

$$\left(\frac{D_1 D_2}{a}\right) = \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)\left(\frac{D_2}{\Delta_1}\right) = \left(\frac{\Delta_2^2 \operatorname{sgn} D_2}{\Delta_1}\right) = \left(\frac{\operatorname{sgn} D_2}{\Delta_1}\right),$$

ce qu'on peut mettre sous la forme suivante, symétrique en D_1 et D_2,

$$\left(\frac{D_1 D_2}{a}\right) = (-1)^{\frac{1-\operatorname{sgn} D_1}{2} \frac{1-\operatorname{sgn} D_2}{2}} = \varepsilon .$$

A cause de l'identité

$$\frac{a}{\Delta_1 \Delta_2} = \frac{1}{\Delta_1} + \frac{1}{\Delta_2}$$

la dernière expression de $A(x, D_1 D_2)$ devient

$$A(x, D_1 D_2) = \prod_{\nu=1}^{\Delta_1 \Delta_2} \left(x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta_1} + \frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}}\right)^{\frac{1}{2}\left[\varepsilon\left(\frac{D_1 D_2}{\nu}\right) + \left(\frac{D_1 D_2}{\nu}\right)^2\right]}.$$

Posons $\nu = \rho + \mu\Delta_1$ $(\rho = 1, 2, \ldots, \Delta_1;\ \mu = 0, 1, 2, \ldots, \Delta_2 - 1)$, il vient

$$A(x, D_1 D_2) = \prod_{\rho=1}^{\Delta_1} \prod_{\mu=0}^{\Delta_2 - 1} \left(x - e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1} + \frac{2\pi i}{\Delta_2}(\rho + \mu\Delta_1)}\right)^{\sigma_{\rho,\mu}}$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$2\sigma_{\rho,\mu} = \varepsilon\left(\frac{D_1}{\rho}\right)\left(\frac{D_2}{\rho + \mu\Delta_1}\right) + \left(\frac{D_1^2}{\rho}\right)\left(\frac{D_2^2}{\rho + \mu\Delta_1}\right).$$

Laissant ρ constant, effectuons la multiplication relative à μ; la quantité $\rho + \mu\Delta_1$ parcourt le système complet de restes pour le module Δ_2, et nous aurons

$$A(x, D_1 D_2) = \prod_{\rho=1}^{\Delta_1} \prod_{\nu=1}^{\Delta_2} \left(x - e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1} + \frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}}\right)^{\frac{1}{2}\left[\varepsilon\left(\frac{D_1}{\rho}\right)\left(\frac{D_2}{\nu}\right) + \left(\frac{D_1^2}{\rho}\right)\left(\frac{D_2^2}{\nu}\right)\right]}.$$

Mettant la différence qui figure au facteur sous la forme

$$x - e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1} + \frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}} = e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1}}\left(x e^{-\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1}} - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}}\right),$$

on obtient

$$A(x, D_1 D_2) = e^{\varphi(\Delta_2)\frac{\pi i}{\Delta_1}\sum_\rho \rho\left(\frac{D_1^2}{\rho}\right)} \prod_\rho \prod_\nu \left(x e^{-\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1}} - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}}\right)^{\sigma'}$$

où

$$2\sigma' = \varepsilon\left(\frac{D_1}{\rho}\right)\left(\frac{D_2}{\nu}\right) + \left(\frac{D_1^2}{\rho}\right)\left(\frac{D_2^2}{\nu}\right).$$

J'observe que la somme

$$\sum_{\rho=1}^{\Delta_1} \rho \left(\frac{D_1^2}{\rho}\right)$$

a pour valeur $\frac{1}{2}\Delta_1\varphi(\Delta_1)$, puis je change ρ en $\Delta_1 - \rho$; la quantité σ' change en σ'', où

$$2\sigma'' = \varepsilon\left(\frac{D_1}{\rho}\right)\left(\frac{D_2}{\nu}\right)\operatorname{sgn} D_1 + \left(\frac{D_1^2}{\rho}\right)\left(\frac{D_2^2}{\nu}\right),$$

et nous aurons

$$A(x, D_1 D_2) = \prod_{\rho=1}^{\Delta_1-1}\prod_{\nu=1}^{\Delta_2-1}\left(xe^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1}} - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}}\right)^{\sigma''}.$$

Dans le deuxième membre, les facteurs où $\left(\frac{D_1}{\rho}\right) = 0$ peuvent être supprimés; les autres peuvent être rangés en deux groupes, celui des nombres $\rho = \alpha$ et le groupe des nombres $\rho = \beta$; on désigne par α et β les nombres de la suite $1, 2, \ldots, \Delta_1 - 1$ qui satisfont aux conditions respectives

$$(23)\qquad \left(\frac{D_1}{\alpha}\right) = \varepsilon \operatorname{sgn} D_1, \qquad \left(\frac{D_1}{\beta}\right) = -\varepsilon \operatorname{sgn} D_1, \qquad \begin{pmatrix} 0 < \alpha < \Delta_1 \\ 0 < \beta < \Delta_1 \end{pmatrix};$$

à ces nombres α et β correspondent respectivement les valeurs suivantes du symbole σ''

$$\left(\frac{D_2}{\nu}\right) + \left(\frac{D_2^2}{\nu}\right), \quad -\left(\frac{D_2}{\nu}\right) + \left(\frac{D_2^2}{\nu}\right).$$

En posant $\rho = \alpha$, le produit partiel correspondant

$$\prod_{\nu=1}^{\Delta_2}\left(xe^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1}} - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta_2}}\right)^{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{D_2}{\nu}\right)+\left(\frac{D_2^2}{\nu}\right)\right]}$$

n'est autre chose que la fonction

$$A\left(xe^{\frac{2\alpha\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right);$$

il serait égal à

$$B\left(xe^{\frac{2\beta\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right),$$

si l'on prenait $\rho = \beta$. Cela permet d'écrire notre résultat sous la forme suivante

$$(23^*) \qquad A(x, D_1 D_2) = \prod_\alpha A\left(xe^{\frac{2\alpha\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right) \prod_\beta B\left(xe^{\frac{2\beta\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right),$$

où les indices α et β sont définis par les conditions (23), ε désignant l'unité

$$(23^*) \qquad \varepsilon = (-1)^{\frac{1-\operatorname{sgn} D_1}{2} \frac{1-\operatorname{sgn} D_2}{2}}.$$

On trouve de la même manière

$$(\overline{23}^*) \qquad B(x, D_1 D_2) = \prod_\alpha B\left(xe^{\frac{2\alpha\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right) \prod_\beta A\left(xe^{\frac{2\beta\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right).$$

Ces deux formules (23^*) et $(\overline{23}^*)$ résolvent le problème proposé; on peut s'en servir pour ramener tous les cas à celui des discriminants impairs.

Prenons $D_2 = -\Delta$, $D_1 = -4$, $-\Delta$ étant un discriminant fondamental négatif impair; ici $\varepsilon = -1$, $\operatorname{sgn} D_1 = -1$, et les conditions (23) donnent $\alpha = 1$, $\beta = 3$. On aura

$$(24) \qquad \begin{cases} A(x, 4\Delta) = A(ix, -\Delta) B(-ix, -\Delta), \\ B(x, 4\Delta) = A(-ix, -\Delta) B(ix, -\Delta). \end{cases}$$

Soit ensuite D un discriminant fondamental positif impair, posons $D_2 = D$, $D_1 = -4$; on a $\varepsilon = 1$, et les conditions (26)

$$\left(\frac{-4}{\alpha}\right) = -1, \qquad \left(\frac{-4}{\beta}\right) = 1$$

donnent $\alpha = 3$, $\beta = 1$; nous aurons

$$(25) \qquad \begin{cases} A(x, -4D) = A(-ix, D) B(ix, D), \\ B(x, -4D) = A(ix, D) B(-ix, D). \end{cases}$$

Soit maintenant, $D_2 = D$ étant toujours positif impair, $D_1 = 8$; on a $\varepsilon = 1$, puis

$$\left(\frac{D_1}{\alpha}\right) = 1, \qquad \left(\frac{D_1}{\beta}\right) = -1,$$

d'où $\alpha = 1, 7$ et $\beta = 3, 5$; en employant l'écriture

$$j = \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

on a les relations

$$(26)\quad \begin{cases} A(x, 8D) = A(jx, D)A(j^{-1}x, D)B(j^3x, D)B(j^{-3}x, D), \\ B(x, 8D) = B(jx, D)B(j^{-1}x, D)A(j^3x, D)A(j^{-3}x, D), \end{cases}$$

et puis, en prenant $D_1 = -8$, on trouve

$$(27)\quad \begin{cases} A(x, -8D) = A(j^{-1}x, D)A(j^{-3}x, D)B(jx, D)B(j^3x, D), \\ B(x, -8D) = B(j^{-1}x, D)B(j^{-3}x, D)A(jx, D)A(j^3x, D). \end{cases}$$

Si l'on fait $D_2 = -\Delta$, $D_1 = -8$, on a $\varepsilon = -1$, $\operatorname{sgn} D_1 = -1$, $\left(\frac{D_1}{\alpha}\right) = 1$, $\left(\frac{D_1}{\beta}\right) = -1$; $\alpha = 1, 3$; $\beta = 5, 7$; les résultats sont

$$(28)\quad \begin{cases} A(x, 8\Delta) = A(jx, -\Delta)A(j^3x, -\Delta)B(j^{-1}x, -\Delta)B(j^{-3}x, -\Delta), \\ B(x, 8\Delta) = B(jx, -\Delta)B(j^3x, -\Delta)A(j^{-1}x, -\Delta)A(j^{-3}x, -\Delta), \end{cases}$$

enfin on trouve

$$(26^*)\quad A(x, -8\Delta) = A(jx, -\Delta)A(j^{-1}x, -\Delta)B(j^3x, -\Delta)B(j^{-3}x, -\Delta)$$

et une expression analogue pour $B(x, -8\Delta)$.

Cette formule (26*) se trouve contenue dans (26) si l'on y écrit $D = -\Delta$; cette formule-là subsiste donc pour tous les discriminants impairs D, positifs ou négatifs.

Nous verrons que la détermination du nombre des classes d'un discriminant positif exige le calcul du quotient $B(1):A(1)$. La formule (23*) ramène le calcul de cette quantité à la détermination des quantités de la forme

$$A\left(e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right),$$

sans avoir besoin de l'expression explicite des polynômes $Y(x, D_1D_2)$ et $Z(x, D_1D_2)$; le calcul des dites quantités est relativement facile. Mais on

peut mettre le problème qui nous occupe en relation avec la théorie de l'élimination.

Posons, pour abréger

$$A_1 = A(x, D_1), \qquad A_2 = A(x, D_2), \text{ etc.},$$

et représentons par $R(A_1, A_2)$ le résultant des polynômes A_1 et A_2. Cela étant, supposons $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, de sorte que les conditions (23) deviennent

$$\left(\frac{D_1}{\alpha}\right) = 1, \qquad \left(\frac{D_1}{\beta}\right) = -1;$$

les quantités $e^{\frac{2\alpha\pi i}{\Delta_1}}$ sont racines de l'équation $A_1(x) = 0$, les $e^{\frac{2\beta\pi i}{\Delta_1}}$ celles de $B_1(x) = 0$; or on a

$$R(A_1, A_2) = \prod_\alpha A\left(e^{\frac{2\alpha\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right),$$

$$R(B_1, B_2) = \prod_\beta B\left(e^{\frac{2\beta\pi i}{\Delta_1}}, D_2\right),$$

et l'équation (23*) permet de conclure

$$(29^a) \qquad A(1, D_1D_2) = R(A_1, A_2)R(B_1, B_2).$$

On trouverait de même

$$(29^b) \qquad B(1, D_1D_2) = R(A_1, B_2)R(A_2, B_1),$$

et les mêmes formules s'obtiendraient en supposant $D_1 = -\Delta_1$, $D_2 = -\Delta_2$.

Ces formules, intéressantes en théorie, ne contribuent rien à simplifier la pratique.

7. Reprenons l'équation (7) pour D positif, en supprimant le terme nul $\log c$:

$$\text{(a)} \qquad \log\frac{B(x)}{A(x)} = \sqrt{D}\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{D}{\mu}\right)\frac{x^\mu}{\mu}.$$

En passant à la limite pour $x = 1$, le second membre devient

$$\sqrt{D}\sum_1^\infty\left(\frac{D}{\mu}\right)\frac{1}{\mu} = Cl(D)\log E(D);$$

donc nous aurons la formule connue

$$(30)\qquad Cl(D)\log E(D) = \log\frac{B(1)}{A(1)},$$

ou bien

$$(30^*)\qquad Cl(D)\log E(D) = \log\frac{Y(1\,,\,D)+\sqrt{D}\,Z(1\,,\,D)}{Y(1\,,\,D)-\sqrt{D}\,Z(1\,,\,D)}.$$

Ce résultat ramène le calcul du nombre des classes à la détermination de l'exposant H dans l'équation

$$\frac{Y+\sqrt{D}\,Z}{Y-\sqrt{D}\,Z} = \left(\frac{T+U\sqrt{D}}{2}\right)^H, \qquad \begin{pmatrix} Y = Y(1\,,\,D) \text{ et} \\ Z = Z(1\,,\,D) \end{pmatrix};$$

c'est donc un résultat d'une très haute importance théorique; car il n'y reste aucune trace de l'origine transcendante qui la fait naître, tous les nombres qui y figurent pouvant s'obtenir par des procédés purement algébriques.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème connu que le nombre des classes, aussi pour les discriminants fondamentaux positifs, est impair, si le discriminant est un nombre premier, et qu'il est pair, si le discriminant est un nombre composé plus grand que 8.

Si le discriminant est un nombre premier, on a $F(1) = D$, et puis $Y^2 - DZ^2 = 4D$, en posant pour abréger, $Y = Y(1)$, $Z = Z(1)$. On voit que Y est nécessairement divisible par D, et en faisant $Y = Dz$, $Z = y$, il vient l'équation

$$y^2 - Dz^2 = -4;$$

ces nombres y et z ne satisfont pas à l'équation de Fermat, d'où il suit que le quotient

$$\log\frac{|y| + |z|\sqrt{D}}{2} : \log\frac{T+U\sqrt{D}}{2}$$

n'est pas un entier. Or on a

$$Cl(D)\log E(D) = 2\log\frac{|Y+Z\sqrt{D}|}{\sqrt{4F(1)}} = 2\log\frac{|Y+Z\sqrt{D}|}{2\sqrt{D}},$$

d'où il suit que Y et Z sont du même signe et que

$$\frac{1}{2}Cl(D) = \log\frac{|y + z\sqrt{D}|}{2} : \log\frac{T + U\sqrt{D}}{2};$$

le second membre n'étant pas entier, il faut que $Cl(D)$ soit impair.

Si au contraire D est composé et plus grand que 8, on a $F(1) = 1$ et par conséquent

$$Y^2 - DZ^2 = 4,$$

d'où il suit que le quotient

$$\log\left|\frac{Y + Z\sqrt{D}}{2}\right| : \log E(D) = \mu$$

est un entier; par conséquent le nombre des classes

$$Cl(D) = 2\log\left|\frac{Y + Z\sqrt{D}}{2}\right| : \log E(D) = 2\mu$$

sera pair.

Pour $D = 8$ on trouve aisément que le nombre des classes est égal à un.

8. Dans l'équation (7) pour $D = D_1$ qui s'écrit

$$\sqrt{D_1}\operatorname{sgn} D_1 \sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{D_1}{\mu}\right)\frac{x^\mu}{\mu} = \log\frac{Y_1(x) + \sqrt{D_1}Z_1(x)}{Y_1(r) - \sqrt{D_1}Z_1(x)} + \log c,$$

où l'on emploie la notation

$$Y_1(x) = Y(x, D_1), \qquad Z_1(x) = Z(x, D_1),$$

posons

$$xe^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}} \text{ au lieu de } x,$$

Δ_2 désignant la valeur absolue d'un discriminant fondamental D_2; multiplions les deux membres de l'équation ainsi obtenue par $\left(\frac{D_2}{h}\right)$ et ajoutons les résultats pour $h = 1, 2, 3, \ldots, \Delta_2 - 1$; il vient

$$(31)\qquad \sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\operatorname{sgn} D_1 \sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{D_1D_2}{\mu}\right)\frac{x^\mu}{\mu} = \sum_{h=1}^{\Delta_2-1}\left(\frac{D_2}{h}\right)\log\frac{Y_1\left(xe^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right) + \sqrt{D_1}Z_1\left(xe^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)}{Y_1\left(xe^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right) - \sqrt{D_1}Z_1\left(xe^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)}.$$

Cette formule donnerait à peine quelque chose d'utile, si le produit $D_1 D_2$ était négatif, à cause de l'indétermination du logarithme; mais si ce produit-là est positif, le premier membre est réel en même temps que x et on pourra se borner aux valeurs réelles des logarithmes qui figurent au second membre.

Le produit $\sqrt{D_1}\sqrt{D_2}\,\mathrm{sgn}\,D_1$ étant positif toutes les fois que $D_1 D_2$ le soit, le premier membre aura, pour $x = 1$, la valeur

$$Cl(D_1 D_2) \log E(D_1 D_2)$$

et il s'ensuit:

$$(31^*) \qquad Cl(D_1 D_2) \log E(D_1 D_2) = \sum_{h=1}^{\Delta_2 - 1} \left(\frac{D_2}{h}\right) \log \frac{Y_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right) + \sqrt{D_1}\, Z_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)}{Y_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right) - \sqrt{D_1}\, Z_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)}$$

(D_1 et D_2 étant deux discriminants fondamentaux du même signe, $\Delta_1 = |D_1|$, $\Delta_2 = |D_2|$, puis $Y_1(x)$ et $Z_1(x)$ désignant les quantités $Y(x, D)$ et $Z(x, D)$).

On pourra rendre à la moitié le nombre des termes du second membre, si l'on observe que la quantité $e^{\frac{2\pi i}{\Delta_2}(\Delta_2 - h)}$ est l'inverse de $e^{\frac{2\pi i}{\Delta_2}h}$ de sorte qu'en employant les relations (19^a) ou (19^b), la quantité

$$\frac{Y_1\left(e^{\frac{2k\pi i}{\Delta_2}}\right) + \sqrt{D_1}\, Z_1\left(e^{\frac{2k\pi i}{\Delta_2}}\right)}{Y_1\left(e^{\frac{2k\pi i}{\Delta_2}}\right) - \sqrt{D_1}\, Z_1\left(e^{\frac{2k\pi i}{\Delta_2}}\right)}$$

en y faisant $k = \Delta_2 - h$, devient

$$\frac{Y_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right) + \mathrm{sgn}\, D_1 \sqrt{D_1}\, Z_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)}{Y_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right) - \mathrm{sgn}\, D_1 \sqrt{D_1}\, Z_1\left(e^{\frac{2h\pi i}{\Delta_2}}\right)}.$$

9. Considérons l'équation

$$\text{(a)} \qquad \sum_{k=1}^{\Delta - 1} \left(\frac{-\Delta}{k}\right) \frac{1}{1 - e^{\frac{2k\pi i}{\Delta}}} = \frac{2i\sqrt{\Delta}}{\tau} Cl(-\Delta),$$

conséquence immédiate de la formule

$$\sum_{k=1}^{\Delta - 1} \left(\frac{-\Delta}{k}\right) \cot \frac{k\pi}{\Delta} = \frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau} Cl(-\Delta)$$

qui a lieu pour tous les discriminants négatifs.

La fonction entière irréductible $F(z)$ pouvant s'écrire

$$\prod_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(z-e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta}}\right)^{\left(\frac{\Delta^2}{\rho}\right)},$$

on aura

$$F(1)=\prod_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(1-e^{\frac{2\rho\pi i}{\Delta}}\right)^{\left(\frac{\Delta^2}{\rho}\right)},$$

et aussi, pour un entier h premier avec Δ,

$$F(1)=\prod_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(1-e^{\frac{2h\rho\pi i}{\Delta}}\right)^{\left(\frac{\Delta^2}{\rho}\right)}.$$

On tire ensuite de (a)

$$\sum_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\rho}\right)\frac{1}{1-e^{\frac{2h\rho\pi i}{\Delta}}}=\frac{2i\sqrt{\Delta}}{\tau}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)Cl(-\Delta).$$

Il s'ensuit que la fonction entière

$$\left[\prod_{\rho=1}^{\Delta-1}(1-x^\rho)^{\left(\frac{\Delta^2}{\rho}\right)}\sum_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\rho}\right)\frac{1}{1-x^\rho}\right]^2+\frac{4\Delta}{\tau^2}F(1)^2Cl(-\Delta)^2$$

s'évanouit toutes les fois que x devient racine de l'équation irréductible $F(x)=0$. On a donc la congruence

$$(32)\qquad \prod_{\rho=1}^{\Delta-1}(1-x^\rho)^{2\left(\frac{\Delta^2}{\rho}\right)}\left(\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\rho}\right)\frac{1}{1-x^\rho}\right)^2$$
$$\equiv-\frac{4\Delta}{\tau^2}F(1,\Delta)^2Cl(-\Delta)^2\pmod{F(x,\Delta)}.$$

Ce résultat est susceptible d'une forme plus simple, si le discriminant $-\Delta$ est fondamental. Dans ce cas on a en effet, pour le même module, la congruence

$$-\Delta\equiv Q(x)^2,$$

et il vient

$$\prod_\rho(1-x^\rho)^{\left(\frac{\Delta^2}{\rho}\right)}\sum_\rho\left(\frac{-\Delta}{\rho}\right)\frac{1}{1-x^\rho}\equiv\pm\frac{2}{\tau}F(1)Cl(-\Delta)Q(x,-\Delta).$$

Pour déterminer le signe, posons $x = e^{\frac{2\pi i}{\Delta}}$, ce qui change la congruence en égalité; le premier membre ayant alors pour valeur l'expression

$$F(1)\frac{2i\sqrt{\Delta}}{\tau}Cl(-\Delta)$$

qui est égale à la suivante

$$\frac{2}{\tau}F(1)Cl(-\Delta)Q\left(e^{\frac{2\pi i}{\Delta}}\right),$$

il faudra prendre le signe supérieur et par conséquent

$$(33)\qquad \prod_{\rho=1}^{\Delta-1}(1-x^\rho)^{\left(\frac{\Delta^2}{\rho}\right)}\sum_{\rho=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\rho}\right)\frac{1}{1-x^\rho}$$
$$\equiv \frac{2}{\tau}F(1, \Delta)Cl(-\Delta)Q(x, -\Delta) \pmod{F(x, \Delta)},$$

$-\Delta$ étant un discriminant fondamental.

Il y a un résultat analogue pour des discriminants fondamentaux positifs. Soit en effet, pour abréger l'écriture,

$$Cl(D) = K.$$

on a la formule

$$\left(\frac{T + U\sqrt{D}}{2}\right)^K = \frac{B(1)}{A(1)} = \frac{B^2(1)}{F(1)},$$

puis

$$B(1) = \prod_b\left(1 - e^{\frac{2b\pi i}{D}}\right), \qquad \left(\frac{D}{b}\right) = -1.$$

Posant donc

$$G(x) = \prod_b(1 - x^b), \qquad \left(\begin{matrix} 0 < b < D \\ \left(\frac{D}{b}\right) = -1 \end{matrix}\right),$$

on aura en vertu de la relation

$$Q\left(e^{\frac{2\pi i}{D}}\right) = \sqrt{D},$$

la congruence suivante:

$$\left[\frac{T + UQ(x)}{2}\right]^K \equiv \frac{G^2(x)}{F(1)} \pmod{F(x)}. \tag{34}$$

10. L'équation suivante qui résulte de (5) et (11)

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\frac{1}{x - e^{\frac{2\nu\pi i}{\Delta}}} = i\sqrt{\Delta}\,\frac{Z(x)Y'(x) - Y(x)Z'(x)}{2F(x)} \tag{35}$$

permet d'établir plusieurs formules dans lesquelles intervient le nombre des classes d'un discriminant négatif fondamental; on les obtient en posant $x = 1, -1, \pm i, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; pour ces valeurs de x la transformation du premier membre n'a aucune difficulté, je me borne donc à signaler le résultat.

En prenant $x = e^{\frac{2r\pi i}{s}}$, le premier membre devient

$$\frac{i}{2}e^{-\frac{2r\pi i}{s}}\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\cot\left(\frac{\nu}{\Delta} - \frac{r}{s}\right)\pi,$$

ce qui donne l'équation

$$x\frac{Z(x)Y'(x) - Y(x)Z'(x)}{F(x)} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)\cot\left(\frac{\nu}{\Delta} - \frac{r}{s}\right)\pi, \tag{35*}$$

où $x = e^{\frac{2r\pi i}{s}}$, et $-\Delta$ désignant un discriminant fondamental. Le cas de $r = 0$ ou bien $x = 1$ a été établi au n° 3, et je me borne donc aux autres cas. Pour $\frac{r}{s} = \frac{1}{2}$ ou $x = -1$ on est conduit à la fonction

$$\cot\left(\frac{\nu}{\Delta} - \frac{1}{2}\right)\pi = -\operatorname{tg}\frac{\nu\pi}{\Delta}$$

pour laquelle on trouve la formule suivante

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta} = \frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}\left(1 - 2\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)Cl(-\Delta) \tag{36}$$

qui a lieu pour *tous* les discriminants impairs et aussi pour des discriminants pairs fondamentaux.

Il s'ensuit

$$\frac{Z(-1)Y'(-1)-Y(-1)Z'(-1)}{F(-1)}=4\,\frac{1-2\left(\frac{2}{\Delta}\right)}{\tau}\,Cl(-\Delta);$$

or, comme nous avons vu plus haut, on a à l'exception des cas peu intéressants $\Delta = 3, 4, 8$, les formules

$$F(-1)=1, \qquad Z(-1)=0, \qquad Y(-1)=\pm 2,$$

ce qui permet d'écrire

$$Z'(-1, -\Delta)=\varepsilon\left(1-2\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)Cl(-\Delta), \tag{37}$$

où $\varepsilon = -\frac{1}{2}Y(-1, -\Delta)$ est l'unité positive ou négative qui se trouve déterminée par les formules (22).

Il peut présenter quelque intérêt de posséder la valeur de la somme qui figure au premier membre de la formule (36) aussi dans le cas où $-\Delta$ est un discriminant pair, pas nécessairement fondamental. On y répond par les deux formules aisées à obtenir

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta}=\pm\frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}Cl(-\Delta), \qquad (\Delta\equiv\pm 4 \pmod{16}), \tag{36^a}$$

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\operatorname{tg}\frac{h\pi}{\Delta}=(-1)^{\frac{\Delta}{8}-1}\frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}Cl(-\Delta), \qquad (\Delta\equiv 0 \pmod{8}). \tag{36^b}$$

On a ensuite pour les discriminants fondamentaux

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\cot\left(\frac{h}{\Delta}-\frac{r}{3}\right)\pi=-\left(1+3\left(\frac{\Delta}{3}\right)\right)\frac{2\sqrt{\Delta}}{\tau}Cl(-\Delta), \tag{38}$$

où $r=1$ ou $r=2$, puis, pour les discriminants fondamentaux impairs

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\cot\left(\frac{h}{\Delta}-\frac{r}{4}\right)\pi=\left(2-\left(\frac{2}{\Delta}\right)\right)\frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}Cl(-\Delta), \tag{39}$$

où $r=1$ ou $r=3$. Pour les discriminants fondamentaux pairs le premier membre est nul.

11. En désignant par $\psi(n, m)$ le nombre des solutions de la congruence quadratique

$$x^2 \equiv n \pmod{m},$$

je suppose que le module m soit la valeur absolue d'un discriminant fondamental, dont les facteurs premiers impairs p sont pris avec un signe déterminé, tel que l'on ait toujours $p \equiv 1 \pmod 4$, de sorte qu'ils auront la forme des discriminants.

Une discussion bien connue donne les résultats suivants:

I. m impair, n quelconque; $m = \pm \Pi p$,

$$\psi(n, m) = \prod_p \left(1 + \left(\frac{p}{n}\right)\right).$$

II. m pair, n impair.

1. $m = \pm 4 \Pi p$, $\psi(n, m) = \left(1 + \left(\frac{-4}{n}\right)\right) \prod \left(1 + \left(\frac{p}{n}\right)\right).$

2. $m = \pm 8 \Pi p$, $\psi(n, m) = \left(1 + \left(\frac{-4}{n}\right)\right)\left(1 + \left(\frac{8}{n}\right)\right) \prod \left(1 + \left(\frac{p}{n}\right)\right).$

III. m pair

$$\frac{1}{2}\psi(4n, m) = \prod \left(1 + \left(\frac{p}{n}\right)\right),$$

p parcourant les facteurs premiers impairs de m.

Ces résultats se résument d'une manière plus simple comme il suit, en introduisant une sommation relative à tous les diviseurs d positifs ou négatifs du nombre m qui ont la forme d'un discriminant fondamental, en prenant parmi eux aussi la valeur $d = 1$, et les deux diviseurs $8k$ et $-8k$, lorsqu'ils sont possibles, devant être considérés comme différents. Sous ces conventions, on a:

$$\psi(m, n) = \sum_{m:d} \left(\frac{d}{n}\right), \tag{A}$$

si un au moins des deux entiers m et n est impair, puis

$$\frac{1}{2}\psi(4n, m) = \sum_{m:d} \left(\frac{d}{4n}\right), \tag{B}$$

si m est pair.

Ces préliminaires posés, il sera aisé d'évaluer les sommes telles que

$$\sum_{k=1}^{m-1} f\left(\frac{k^2}{m}\right),$$

où $f(x)$ signifie une fonction admettant la période 1.

Supposons d'abord que m soit impair, on aura, grâce à la périodicité de $f(z)$

$$f\left(\frac{k^2}{m}\right) = f\left(\frac{n}{m}\right), \quad \text{si} \quad k^2 \equiv n \pmod{m},$$

et la quantité $f\left(\frac{n}{m}\right)$ figure exactement au nombre de $\psi(n, m)$ de fois dans la suite $\sum f\left(\frac{k^2}{m}\right)$. On a donc

$$\sum_{k=1}^{m-1} f\left(\frac{k^2}{m}\right) = \sum_{n=1}^{m-1} \psi(n, m) f\left(\frac{n}{m}\right);$$

en employant la formule (A), cette quantité s'exprime sous la forme

$$\sum_{n=1}^{m-1} \sum_{m:d} \left(\frac{d}{n}\right) f\left(\frac{n}{m}\right) = \sum_{m:d} \sum_{n=1}^{m-1} \left(\frac{d}{n}\right) f\left(\frac{n}{m}\right).$$

Par conséquent, on a le théorème

$$\text{(C)} \qquad \sum_{k=1}^{m-1} f\left(\frac{k^2}{m}\right) = \sum_{d} \sum_{\nu=1}^{m-1} \left(\frac{d}{\nu}\right) f\left(\frac{\nu}{m}\right)$$

(m étant un produit de nombres premiers impairs différents, puis

$$f(x+1) = f(x)$$

et d parcourant tous les diviseurs de m pris avec le signe convenable pour que $d \equiv 1 \pmod{4}$).

Si m est pair (divisible par 4 et non plus par 16), on aura de même

$$\sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{k^2}{m}\right) = \sum_{n=0}^{m-1} \psi(n, m) f\left(\frac{n}{m}\right),$$

où l'on avait admis aussi la valeur $k = 0$, sans quoi on serait obligé de supprimer aussi le terme $k = \frac{m}{2}$; mais la formule qui donne $\psi(n, m)$ varie avec la parité de n, puis on a $\psi(n, m) = 0$ pour $n \equiv 2 \pmod{4}$, et on

peut se borner aux valeurs impaires de n et à celles qui sont des multiples de 4. Puisque

$$\psi(n, m) = \sum_d \left(\frac{d}{n}\right) \quad \text{pour } n \text{ impair,}$$

et

$$\psi(n, m) = 2\sum \left(\frac{d}{n}\right) \quad \text{pour } n \text{ pair,}$$

nous aurons

$$\text{(D)} \qquad \sum_{k=0}^{m-1} f\left(\frac{k^2}{m}\right) = \sum_{m:d} \sum_{\lambda} \left(\frac{d}{\lambda}\right) f\left(\frac{\lambda}{m}\right) + 2\sum_{m:d} \sum_{\nu=0}^{\frac{1}{4}m-1} \left(\frac{d}{4\nu}\right) f\left(\frac{4\nu}{m}\right),$$

où il faut prendre $\left(\frac{1}{0}\right) = 1$, puis $\lambda = 1, 3, 5, \ldots, \lambda < m$. ($m$ est la valeur absolue d'un discriminant fondamental pair, d parcourt les diviseurs de m, positifs où négatifs, qui ont la forme de discriminant, et aussi la valeur $d = 1$; $f(x + 1) = f(x)$.)

Comme application, prenons $f(x) = \Re(rx)$, où le symbole $\Re(z)$ a la même signification que plus haut $z - E(z)$, et r signifie un entier. En supposant l'entier positif m premier avec r, puis impair et sans diviseurs carrés, la formule (C) sera applicable et donnera

$$\sum_{\nu=1}^{m-1} \Re\left(\frac{r\nu^2}{m}\right) = \sum_d \sum_{\nu=1}^{m-1} \left(\frac{d}{\nu}\right) \Re\left(\frac{r\nu}{m}\right).$$

Grâce à l'hypothèse que r et m soient premiers entre eux, on peut écrire

$$\sum_{\nu=1}^{m-1} \left(\frac{d}{\nu}\right) \Re\left(\frac{r\nu}{m}\right) = \left(\frac{d}{r}\right) \sum_{\nu=1}^{m-1} \left(\frac{d}{r\nu}\right) \Re\left(\frac{r\nu}{m}\right),$$

et la dernière quantité sera identique avec la suivante

$$\left(\frac{d}{r}\right) \sum_{\mu=1}^{m-1} \left(\frac{d}{\mu}\right) \Re\left(\frac{\mu}{m}\right) = \left(\frac{d}{r}\right) \sum_{\mu=1}^{m-1} \left(\frac{d}{\mu}\right) \frac{\mu}{m}.$$

Si d est un discriminant positif, la dernière somme est nulle, elle se réduit à

$$\sum_{1}^{m-1} \frac{\mu}{m} = \frac{m-1}{2}, \quad \text{pour} \quad d = 1,$$

puis à

$$-\left(\frac{-\delta}{r}\right)\frac{2}{\tau_\delta}Cl(-\delta),\quad \text{si}\quad d=-\delta$$

est un discriminant négatif. Il vient par conséquent

$$(40)\qquad \sum_{\nu=1}^{m-1}\Re\left(\frac{r\nu^2}{m}\right)=\frac{m-1}{2}-\sum_{\delta}\left(\frac{-\delta}{r}\right)\frac{2}{\tau_\delta}Cl(-\delta)$$

(m étant un produit de nombres premiers impairs différents, et δ parcourant tous les diviseurs positifs de m qui ont la forme $4k+3$; r signifie un entier premier avec m).

Le symbole τ_δ a naturellement la même signification pour la discriminant $-\delta$ que τ avait pour le discriminant Δ.

Si en particulier le nombre m est le produit de nombres premiers (positifs) de la forme $4k+1$, on aura

$$\sum_{\nu=1}^{m-1}\Re\left(\frac{r\nu^2}{m}\right)=\frac{m-1}{2}.$$

Cette formule (40) permet d'évaluer les sommes

$$\sum_{\nu=1}^{m-1}E\left(\frac{r\nu^2}{m}\right)$$

d'une manière assez commode; si en particulier $m=\Delta$ est un nombre premier de la forme $4k+3$, on aura

$$\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}E\left(\frac{r\nu^2}{\Delta}\right)=\sum_{\nu=1}^{\Delta-1}\frac{r\nu^2}{\Delta}-\frac{\Delta-1}{2}+\frac{2}{\tau}\left(\frac{-\Delta}{r}\right)Cl(-\Delta),$$

et on pourra faire usage d'un raisonnement habituel depuis Eisenstein, pour transformer le premier membre. Des résultats de cette espèce pourront cependant à peine avoir quelque importance.

Passons au cas de m pair qui donne

$$\sum_{k=1}^{m-1}\Re\left(\frac{rk^2}{m}\right)=\sum_{d}\sum_{\lambda}\left(\frac{d}{\lambda}\right)\Re\left(\frac{r\lambda}{m}\right)+2\sum_{d}\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{d}{4\nu}\right)\Re\left(\frac{4r\nu}{m}\right).$$

Les restes des entiers $r\lambda$ suivant le module m reproduisant l'ensemble des λ, on a comme plus haut

$$\text{(a)}\qquad \sum_\lambda \left(\frac{d}{\lambda}\right)\Re\left(\frac{r\lambda}{m}\right) = \left(\frac{d}{r}\right)\sum\left(\frac{d}{\lambda}\right)\Re\left(\frac{\lambda}{m}\right) = \left(\frac{d}{r}\right)\sum_\lambda\left(\frac{d}{\lambda}\right)\frac{\lambda}{m},$$

r devant toujours rester premier avec m. On a aussi

$$\text{(b)}\qquad \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{d}{4\nu}\right)\Re\left(\frac{4r\nu}{m}\right) = \left(\frac{d}{r}\right)\sum_{1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{d}{4\nu}\right)\Re\left(\frac{4\nu}{m}\right) = \left(\frac{d}{r}\right)\sum_{1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{d}{4\nu}\right)\frac{4\nu}{m}.$$

Si d est un discriminant positif, les expressions (a) et (b) s'évanouiront, et il ne reste que les cas où $d = 1$ et où $d = -\delta$ est un discriminant négatif.

Posons

$$S = \sum_{\lambda<m}\left(\frac{-\delta}{\lambda}\right)\lambda, \qquad S' = \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{-\delta}{4\nu}\right)\nu;$$

la somme S' ne peut différer de zéro que lorsque δ est impair, on trouve aisément comme plus haut

$$S' = \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{-\delta}{\nu}\right)\nu = -\frac{m}{4}\frac{2}{\tau_\delta}Cl(-\delta),$$

et il ne reste que la somme S. Si δ est pair, elle est identique avec la suivante

$$S = \sum_{\nu=1}^{m-1}\left(\frac{-\delta}{\nu}\right)\nu$$

dont la valeur est

$$-m\frac{2}{\tau_\delta}Cl(-\delta),$$

et il faut étudier le seul cas, où δ est impair. Je pose

$$\lambda = \rho + 2\delta\mu, \qquad \left(\rho = 1, 3, \ldots, 2\delta - 1;\ \mu = 0, 1, \ldots, \frac{m}{2\delta} - 1\right),$$

nous aurons

$$S = \sum_{\rho} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right) \sum_{\mu=0}^{\frac{m}{2\delta}-1} (\rho + 2\delta\mu) = \frac{m}{2\delta} \sum_{\rho<2\delta} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right)\rho + A \sum_{\rho<2\delta} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right)$$

où l'on a désigné par A un entier indépendant de ρ et dont la valeur est inutile à signaler, puisque

$$\sum_{\rho} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right) = 0 \quad (\rho = 1, 3, 5, \ldots, 2\delta - 1).$$

La somme suivante qui seule reste à obtenir

$$S_0 = \sum_{\rho<2\delta} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right)\rho$$

contient des termes où $\rho = 1, 3, \ldots, \delta - 2$, puis les termes $\rho = \delta + \sigma$, $\sigma = 2, 4, 6, \ldots, \delta - 1$, de sorte que

$$S_0 = \sum_{\rho<\delta} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right)\rho + \sum_{\sigma} \left(\frac{-\delta}{\sigma}\right)(\sigma + \delta),$$

et en observant que la quantité

$$\sum_{\rho<\delta} \left(\frac{-\delta}{\rho}\right)\rho + \sum_{\sigma} \left(\frac{-\delta}{\sigma}\right)\sigma$$

se compose des mêmes termes que la suivante

$$\sum_{1}^{\delta-1} \left(\frac{-\delta}{\nu}\right)\nu = -\delta \frac{2}{\tau_\delta} Cl(-\delta),$$

il vient:

$$S_0 = -\delta \frac{2}{\tau_\delta} Cl(-\delta) + \delta \sum_{\nu=1}^{\frac{\delta-1}{2}} \left(\frac{-\delta}{2\nu}\right)$$

ou bien

$$S_0 = 2\delta \frac{2}{\tau_\delta} \left[\left(\frac{2}{\delta}\right) - 1\right] Cl(-\delta),$$

ce qui donne pour la somme considérée

$$S = m \frac{2}{\tau_\delta} \left[\left(\frac{2}{\delta}\right) - 1\right] Cl(-\delta),$$

lorsque δ est impair; cette formule reproduit celle qu'on a établie pour δ pair et est donc générale.

Cela étant, les formules qu'on vient de prouver

$$\sum_{\lambda}\left(\frac{d}{\lambda}\right)\Re\left(\frac{r\lambda}{m}\right) = \begin{cases} 0 \text{ pour } d > 1, \\ \frac{1}{4}m \text{ pour } d = 1, \\ -\left(\frac{-\delta}{r}\right)\left(1-\left(\frac{2}{\delta}\right)\right)\frac{2}{\tau_\delta}Cl(-\delta) \text{ pour } d = -\delta, \end{cases}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{d}{4\nu}\right)\Re\left(\frac{4r\nu}{m}\right) = \begin{cases} 0 \text{ pour } d > 1 \text{ ou pour } d \text{ pair}, \\ \frac{1}{2}\left(\frac{m}{4}-1\right) \text{ pour } d = 1, \\ -\left(\frac{-\delta}{r}\right)\frac{2}{\tau_\delta}Cl(-\delta) \text{ pour } d = -\delta \text{ et impair} \end{cases}$$

permettent de conclure

$$\sum_{k=1}^{m-1}\Re\left(\frac{rk^2}{m}\right) = \frac{1}{2}m - 1 - \sum_{\delta}\left(\frac{-\delta}{r}\right)\left(1-\left(\frac{2}{\delta}\right)\right)\frac{2}{\tau_{\delta}}Cl(-\delta)$$
$$-2\sum_{\delta'}\left(\frac{-\delta'}{r}\right)\frac{2}{\tau_{\delta'}}Cl(-\delta')$$

où δ parcourt tous les diviseurs de m qui rendent $-\delta$ un discriminant fondamental, tandis que δ' ne parcourt que des diviseurs impairs. On peut écrire d'une manière plus simple

$$(41)\qquad \sum_{\nu=1}^{m-1}\Re\left(\frac{r\nu^2}{m}\right) = \frac{1}{2}m - 1 - \sum_{\delta}\left(\frac{-\delta}{r}\right)\left[1-\left(\frac{2}{\delta}\right)+2\left(\frac{4}{\delta}\right)\right]\frac{2}{\tau_\delta}Cl(-\delta)$$

(m étant la valeur absolue d'un discriminant fondamental pair, r un entier premier avec m, et δ parcourant tous les diviseurs de m qui rendent $-\delta$ un discriminant fondamental).

Nous avons établi la formule (40), avec d'autres analogues, d'une autre manière et sous des hypothèses plus générales, dans un mémoire qui a paru dans les écrits de l'académie de Prague.[1] Ainsi, en supposant dans

[1] *O součtu celých v lomené arithmetické posloupnosti druhého stupně, etc.*, (Rozpravy české Akademie, VII[e] année, n° 7; 1898). V. aussi Annali di Matematica, 3[e] série, t. 11.

la formule (40) m impair et d'ailleurs quelconque, il faudra introduire le plus grand diviseur carré q^2 de m; le premier terme au second membre sera alors $\frac{m-q}{2}$ au lieu de $\frac{m-1}{2}$.

Le deuxième exemple que je veux traiter de la formule (C) consiste à prendre $f(x) = \text{sgn.}\, R^*(rx)$. En me bornant au cas de m impair, j'aurai d'abord

$$\sum_{k=1}^{m-1} \text{sgn.}\, R^*\left(\frac{rk^2}{m}\right) = \sum_d \sum_{\nu=1}^{m-1} \left(\frac{d}{\nu}\right) \text{sgn.}\, R^*\left(\frac{r\nu}{m}\right).$$

Les sommes

$$\sum_1^{m-1} \left(\frac{d}{\nu}\right) \text{sgn.}\, R^*\left(\frac{r\nu}{m}\right) = \left(\frac{d}{r}\right) \sum_1^{m-1} \left(\frac{d}{\nu}\right) \text{sgn.}\, R^*\left(\frac{\nu}{m}\right)$$

sont nulles pour $d \geqq 1$, puis on a

$$\text{sgn.}\, R^*\left(\frac{\nu}{m}\right) = \begin{cases} 1 & \text{pour } \nu < \frac{1}{2} m, \\ -1 & \text{pour } \nu > \frac{1}{2} m, \end{cases}$$

donc pour $d = -\delta$

$$\sum_1^{m-1} \left(\frac{d}{\nu}\right) \text{sgn.}\, R^*\left(\frac{\nu}{m}\right) = \sum_1^{\frac{1}{2}(m-1)} \left(\frac{-\delta}{\nu}\right) - \sum_{\frac{1}{2}(m+1)}^{m-1} \left(\frac{-\delta}{\nu}\right);$$

en prenant, dans la seconde somme, $\nu = m - \mu$, il vient comme valeur du deuxième membre

$$2 \sum_1^{\frac{1}{2}(m-1)} \left(\frac{-\delta}{\nu}\right).$$

faisant $m = \delta'\delta$, on aura $\frac{1}{2}(m-1) = \frac{\delta' - 1}{2}\delta + \frac{\delta - 1}{2}$ et par conséquent, notre quantité sera

$$2 \sum_1^{\frac{1}{2}(\delta-1)} \left(\frac{-\delta}{\nu}\right) = 2\left(2 - \left(\frac{2}{\delta}\right)\right) \frac{2}{\tau_\delta}\, Cl(-\delta)$$

et il vient

$$\sum_{\nu=1}^{m-1} \operatorname{sgn.} R^*\left(\frac{r\nu^2}{m}\right) = 2\sum_{\delta}\left(2-\left(\frac{2}{\delta}\right)\right)\left(\frac{-\delta}{r}\right)\frac{2}{\tau_\delta}Cl(-\delta) \tag{42}$$

(m étant le produit de nombres premiers impairs différents, r premier avec m, δ parcourant les diviseurs positifs de m qui ont la forme $4k+3$).

Les formules qu'on vient d'établir peuvent être considérées comme des analogies arithmétiques des sommes de GAUSS. Nous en allons donner une analogie algébrique, en prenant, dans la formule (C), pour $f(x)$ la fonction $\cot x\pi$; des termes infinis ne se présenteront pas, puisque la congruence $\nu^2 \equiv 0 \pmod m$ exige $\nu \equiv 0 \pmod m$. On aura d'abord

$$\sum_{k=1}^{m-1} \cot\frac{k^2\pi}{m} = \sum_{d}\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(\frac{d}{\nu}\right)\cot\frac{\nu\pi}{m},$$

d parcourant les diviseurs de m, affectés des signes convenables.

Pour d positif, la somme partielle

$$\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(\frac{d}{\nu}\right)\cot\frac{\nu\pi}{m}$$

est identiquement nulle, et il ne reste à considérer que des valeurs négatives $d=-\delta$. La somme à laquelle nous sommes ainsi amenés

$$\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(\frac{-\delta}{\nu}\right)\cot\frac{\nu\pi}{m} = S_\delta$$

se transforme en faisant $\nu = \rho + \delta\mu$, $(\rho = 1, 2, 3, \ldots, \delta - 1;\ \mu = 0, 1, \ldots, m'-1)$, où $m' = \frac{m}{\delta}$. Il vient

$$S_\delta = \sum_{\rho=1}^{\delta-1}\left(\frac{-\delta}{\rho}\right)\sum_{\mu=0}^{m'-1}\cot\left(\frac{\rho\pi}{m}+\frac{\mu\pi}{m'}\right),$$

ou en faisant usage de la relation

$$\sum_{\mu=0}^{m'-1}\cot\left(x+\frac{\mu}{m'}\right)\pi = m'\cot m'x\pi,$$

$$S_\delta = \frac{m}{\delta}\sum_{\rho=1}^{\delta-1}\left(\frac{-\delta}{\rho}\right)\cot\frac{\rho\pi}{\delta},$$

d'où en substituant la valeur

$$\sum_{1}^{\delta-1}\left(\frac{-\delta}{\rho}\right)\cot\frac{\rho\pi}{\delta}=\frac{4\sqrt{\delta}}{\tau_\delta}Cl(-\delta)$$

il suit

$$S_\delta=\frac{4m}{\tau_\delta\sqrt{\delta}}Cl(-\delta),$$

et on a la formule cherchée

$$\sum_{\nu=1}^{m-1}\cot\frac{\nu^2\pi}{m}=4m\sum_{\delta}\frac{1}{\tau_\delta\sqrt{\delta}}Cl(-\delta) \tag{43}$$

(m désignant la valeur absolue d'un discriminant fondamental impair, et δ parcourant les diviseurs de m qui ont la forme $4k+3$).

Dans le cas de m pair ($m\equiv 0 \pmod 4$), dans la somme

$$\sum_{k=1}^{m-1}\cot\frac{k^2\pi}{m}$$

se trouve un terme infini, celui où $k=\frac{m}{2}$. Nou sconvenons donc de prendre $f(x)=\cot x\pi$ pour x fractionnaire, mais $f(x)=0$ pour x entier. La formule (D) nous donnera alors

$$\sum_{k=1}^{m-1}{}^{*}\cot\frac{k^2\pi}{m}=\sum_{d}\sum_{\lambda}\left(\frac{d}{\lambda}\right)\cot\frac{\lambda\pi}{m}+2\sum_{d}\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{d}{4\nu}\right)\cot\frac{4\nu\pi}{m},$$

où l'astérisque indique la suppression du terme $k=\frac{1}{2}m$ qui est infini; on peut écrire d'une manière plus commode

$$\sum_{k=1}^{m-1}{}^{*}\cot\frac{k^2\pi}{m}=\sum_{d}\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(\frac{4d}{\nu}\right)\cot\frac{\nu\pi}{m}+2\sum_{d}\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{d}{4\nu}\right)\cot\frac{4\nu\pi}{m}.$$

Pour $d\geqq 1$. les sommes

$$\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(\frac{4d}{\nu}\right)\cot\frac{\nu\pi}{m},\qquad \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{d}{4\nu}\right)\cot\frac{4\nu\pi}{m}$$

sont nulles, et il ne reste que des sommes où $d=-\delta$ est négatif.

Considérons d'abord la quantité

$$S=\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(\frac{-4\delta}{\nu}\right)\cot\frac{\nu\pi}{m},\quad (\delta \text{ impair});$$

en faisant $\nu=\rho+4\delta\mu$, $m'=\frac{m}{4\delta}$, nous aurons

$$S=\sum_{\rho=1}^{4\delta-1}\left(\frac{-4\delta}{\rho}\right)\sum_{\mu=0}^{m'-1}\cot\left(\frac{\rho\pi}{m}+\frac{\mu\pi}{m'}\right)$$

ou bien

$$S=m'\sum_{\rho=1}^{4\delta-1}\left(\frac{-4\delta}{\rho}\right)\cot\frac{\rho\pi}{4\delta},$$

et en faisant usage de la valeur

$$\sum_{\rho=1}^{4\delta-1}\left(\frac{-4\delta}{\rho}\right)\cot\frac{\rho\pi}{4\delta}=2\sqrt{4\delta}\,Cl(-4\delta),$$

$$S=\frac{m}{\sqrt{\delta}}Cl(-4\delta)=\frac{m}{\sqrt{\delta}}\frac{2}{\tau_\delta}\left(2-\left(\frac{2}{\delta}\right)\right)Cl(-\delta).$$

La formule qu'on vient d'obtenir

$$(\alpha)\qquad \sum_{\nu=1}^{m-1}\left(\frac{-4\delta}{\nu}\right)\cot\frac{\nu\pi}{m}=\frac{m}{\sqrt{\delta}}\frac{2}{\tau_\delta}\left(2-\left(\frac{2}{\delta}\right)\right)Cl(-\delta)$$

simplifie la première partie de l'expression qui nous occupe, mais seulement pour des δ impairs. Si δ est pair, on a identiquement

$$\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(\frac{-4\delta}{\nu}\right)\cot\frac{\nu\pi}{m}=\sum_{\nu=1}^{m-1}\left(\frac{-\delta}{\nu}\right)\cot\frac{\nu\pi}{m}=\frac{m}{\sqrt{\delta}}\frac{4}{\tau_\delta}Cl(-\delta),$$

et ce résultat est d'accord avec le précédent, puisque le symbole de LEGENDRE $\left(\frac{2}{\delta}\right)$ est nul pour δ pair.

Il reste encore les sommes

$$S'=\sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{-\delta}{4\nu}\right)\cot\frac{4\nu\pi}{m};$$

elles sont nulles pour δ pair, et il s'agit donc du cas de δ impair.

En y faisant $\nu = \rho + \delta\mu$, $\frac{m}{4\delta} = m'$, nous aurons

$$S' = \sum_{\rho=1}^{\delta-1}\left(\frac{-\delta}{\rho}\right)\sum_{\mu=0}^{m'-1}\cot\left(\frac{4\rho\pi}{m} + \frac{\mu\pi}{m'}\right) = m'\sum_{\rho=1}^{\delta-1}\left(\frac{-\delta}{\rho}\right)\cot\frac{\rho\pi}{\delta}$$

ou bien

$$(\beta) \qquad \sum_{\nu=1}^{\frac{1}{4}m-1}\left(\frac{-\delta}{4\nu}\right)\cot\frac{4\nu\pi}{m} = \frac{m}{\tau_\delta\sqrt{\delta}}Cl(-\delta).$$

Ces résultats (α) et (β) permettent d'écrire

$$\sum_{k=1}^{m-1}{}^{*}\cot\frac{k^2\pi}{m} = \sum_{\delta}\frac{m}{\sqrt{\delta}}\frac{2}{\tau_\delta}\left(2 - \left(\frac{2}{\delta}\right)\right)Cl(-\delta) + \sum_{\delta'}\frac{m}{\sqrt{\delta'}}\frac{2}{\tau_{\delta'}}Cl(-\delta'),$$

où δ' ne parcourt que des diviseurs impairs. En séparant, dans la première partie, les diviseurs pairs δ'' des diviseurs impairs δ', on aura, après réduction, la formule suivante

$$\sum_{k=1}^{m-1}{}^{*}\cot\frac{k^2\pi}{m} = \sum_{\delta'}\frac{m}{\sqrt{\delta'}}\frac{2}{\tau_{\delta'}}\left(3 - \left(\frac{2}{\delta'}\right)\right)Cl(-\delta') + \sum_{\delta''}\frac{m}{\sqrt{\delta''}}\frac{4}{\tau_{\delta''}}Cl(-\delta'')$$

ce qu'on peut écrire d'une manière plus simple

$$(44) \qquad \sum_{k=1}^{m-1}{}^{*}\cot\frac{k^2\pi}{m} = m\sum_{\delta}\left[2 - \left(\frac{2}{\delta}\right) + \left(\frac{4}{\delta}\right)\right]\frac{2Cl(-\delta)}{\tau_\delta\sqrt{\delta}}$$

(m étant la valeur absolue d'un discriminant fondamental pair, et δ parcourant les diviseurs de m tels que $-\delta$ soit un discriminant; dans la somme au premier membre on supprime le terme infini $k = \frac{m}{2}$).

12. Soient $p_1, p_2, p_3 \ldots$ des nombres premiers impairs, différents entre eux, et positifs, puis $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ des signes donnés par la formule générale

$$\varepsilon_\nu = \left(\frac{-4}{p_\nu}\right) = (-1)^{\frac{p_\nu-1}{2}},$$

et considérons la quantité

$$(45^a) \qquad \varpi_s = \left(\frac{\varepsilon_1 p_1}{s}\right)^{\frac{(-1)^{\alpha_1} + \left(\frac{\varepsilon_1 p_1}{s}\right)}{2}} \left(\frac{\varepsilon_2 p_2}{s}\right)^{\frac{(-1)^{\alpha_2} + \left(\frac{\varepsilon_2 p_2}{s}\right)}{2}} \cdots$$

$$\cdots \left(\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{s}\right)^{\frac{(-1)^{\alpha_\nu} + \left(\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{s}\right)}{2}},$$

dans laquelle $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ signifie un système donné d'entiers qui peuvent être remplacés par 0 ou par 1. Cette quantité ϖ_s est égale à un, si l'on a en même temps

$$\left(\frac{\varepsilon_1 p_1}{s}\right) = (-1)^{\alpha_1}, \qquad \left(\frac{\varepsilon_2 p_2}{s}\right) = (-1)^{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\varepsilon_\nu p_\nu}{s}\right) = (-1)^{\alpha_\nu},$$

tandis qu'elle est nulle dans tout autre cas.

Cela étant, considérons le produit

$$(45) \qquad \theta\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} p_1, p_2, \ldots, p_\nu \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu \end{matrix}\right) = \prod_{s=1}^{\Delta} \left(x - e^{\frac{2s\pi i}{\Delta}}\right)^{\varpi_s},$$

où $\Delta = p_1 p_2 \ldots p_\nu$ est évidemment la valeur absolue d'un discriminant fondamental impair.

Soit N le nombre effectif des facteurs du produit $\theta(x)$, on a évidemment

$$N = \sum_{s=1}^{\Delta} \varpi_s = \frac{1}{2^\nu} \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{p_1^2}{s}\right)\left(\frac{p_2^2}{s}\right) \cdots \left(\frac{p_\nu^2}{s}\right)$$

$$+ \frac{1}{2^\nu} \sum_{\rho_1 \rho_2 \ldots} (-1)^{\alpha_{\rho_1} + \alpha_{\rho_2} + \cdots} \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{\varepsilon_{\rho_1} \varepsilon_{\rho_2} \cdots p_{\rho_1} p_{\rho_2} \cdots}{s}\right)\left(\frac{p_{\sigma_1}^2 p_{\sigma_2}^2 \cdots}{s}\right)$$

où $\rho_1 \rho_2 \ldots$ signifient toutes les combinaisons véritables des entiers $1, 2, 3, \ldots, \nu$, et $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ les combinaisons de ces nombres, autres que les nombres ρ. Pour une combinaison fixe $\rho_1 \rho_2 \ldots \sigma_1 \sigma_2 \ldots$, posons

$$\varepsilon_{\rho_1} \varepsilon_{\rho_2} \cdots p_{\rho_1} p_{\rho_2} \cdots = D', \qquad p_{\sigma_1} p_{\sigma_2} \cdots = Q, \qquad |D'| = \Delta'.$$

D' étant un discriminant, on vérifie aisément que la somme

$$\sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{\varepsilon_{\rho_1} p_{\rho_1} \varepsilon_{\rho_2} p_{\rho_2} \cdots}{s}\right)\left(\frac{p_{\sigma_1}^2 p_{\sigma_2}^2 \cdots}{s}\right) = \sum_{s=1}^{\Delta' Q} \left(\frac{D'}{s}\right)\left(\frac{Q^2}{s}\right)$$

est nulle; parmi les sommes dont se compose N la première seule étant différente de zéro, il s'ensuit

$$N = \frac{1}{2^\nu} \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{p_1^2}{s}\right)\left(\frac{p_2^2}{s}\right)\cdots\left(\frac{p_\nu^2}{s}\right) = \frac{1}{2^\nu} \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{\Delta^2}{s}\right).$$

ce qui n'est autre chose que

$$N = \frac{1}{2^\nu}\varphi(\Delta),$$

en employant l'écriture habituelle de GAUSS.

Prenons maintenant les logarithmes dans (45); il vient, en supposant $|x| > 1$,

$$\log \theta(x \mid \alpha) = N \log x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nx^n} \sum_{s=1}^{\Delta} \varpi_s e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}}.$$

Pour obtenir les coefficients de cette série, c'est à dire les quantités

$$G_n = 2^\nu \sum_{s=1}^{\Delta} \varpi_s e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}},$$

sous une forme plus simple, observons que l'on a, en développant le produit (45^a), l'aggrégat suivant

$$G_n = H_0 + \sum_{\alpha} H_1(\alpha) + \sum_{\alpha', \alpha''} H_2(\alpha', \alpha'') + \ldots,$$

où l'on a posé, pour abréger

$$H_0 = \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{\Delta^2}{s}\right) e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}},$$

puis, p. ex.

$$H_1(\alpha_1) = (-1)^{\alpha_1} \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{\varepsilon_1 p_1}{s}\right)\left(\frac{p_2^2 p_3^2 \ldots p_\nu^2}{s}\right) e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}},$$

$$H_2(\alpha_1, \alpha_2) = (-1)^{\alpha_1+\alpha_2} \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2}{s}\right)\left(\frac{p_3^2 \ldots p_\nu^2}{s}\right) e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}},$$

etc. Dans les sommes dont se compose G_n, il faut remplacer successivement α par tous les nombres de la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$, puis α_1, α_2 par toutes les combinaisons du second ordre $\alpha_1\alpha_2, \alpha_2\alpha_3, \ldots, \alpha_{\nu-1}\alpha_\nu$ des mêmes nombres, et ainsi de suite.

Nous allons évaluer la quantité

$$(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_\mu} H_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu) = \mathfrak{H}_\mu;$$

en posant pour abréger

$$\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2 \dots \varepsilon_\mu p_\mu = D_0, \qquad p_1 p_2 \dots p_\mu = \Delta_0,$$

$$p_{\mu+1} p_{\mu+2} \dots p_\nu = Q,$$

on aura

$$\mathfrak{H}_\mu = \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{D_0}{s}\right)\left(\frac{Q^2}{s}\right) e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta_0 Q}}.$$

Cette expression s'évalue à l'aide de l'identité (2)

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{Q^2}{m}\right) f(m) = \sum_d \mu(d) \sum_{m=1}^{\infty} f(md),$$

où d parcourt les diviseurs de Q, et il vient

$$\mathfrak{H}_\mu = \sum_d \mu(d) \left(\frac{D_0}{d}\right) \sum_{m=1}^{\Delta_0 Q_d} \left(\frac{D_0}{m}\right) e^{\frac{2mn\pi i}{\Delta_0 Q_d}},$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$Q_d = \frac{Q}{d}.$$

Pour simplifier la somme intérieure, posons $m = s + k\Delta_0$, $(s = 1, 2, \dots, \Delta_0;$ $k = 0, 1, \dots, Q_d - 1)$, elle devient

$$a = \sum_{s=1}^{\Delta_0} \left(\frac{D_0}{s}\right) e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta_0 Q_d}} \sum_{k=0}^{Q_d - 1} e^{\frac{2kn\pi i}{Q_d}};$$

elle est donc nulle toutes les fois que $\frac{n}{Q_d} = n'$ ne soit pas un entier, et il ne reste qu'à considérer les termes où n' est entier, pour lesquels elle est égale à

$$a = Q_d \sum_{s=1}^{\Delta_0} \left(\frac{D_0}{s}\right) e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta_0 Q_d}}$$

ou bien

$$a = Q_d \sum_{s=1}^{\Delta_0} \left(\frac{D_0}{s}\right) e^{\frac{2n's\pi i}{\Delta_0}} = Q_d \sqrt{D_0} \left(\frac{D_0}{n'}\right).$$

Pour obtenir le signe de LEGENDRE qui figure au second membre, observons que

$$\left(\frac{D_0}{n'}\right)\left(\frac{D_0}{Q_d}\right) = \left(\frac{D_0}{n}\right),$$

d'où il suit, D_0 étant premier avec Q_d,

$$\left(\frac{D_0}{n'}\right) = \left(\frac{D_0}{Q_d}\right)\left(\frac{D_0}{n}\right).$$

Ensuite

$$\left(\frac{D_0}{Q_d}\right)\left(\frac{D_0}{d}\right) = \left(\frac{D_0}{Q}\right),$$

d'où

$$\left(\frac{D_0}{Q_d}\right) = \left(\frac{D_0}{d}\right)\left(\frac{D_0}{Q}\right);$$

en substituant cette valeur, il vient

$$\left(\frac{D_0}{n'}\right) = \left(\frac{D_0}{d}\right)\left(\frac{D_0}{Q}\right)\left(\frac{D_0}{n}\right) = \left(\frac{D_0}{nQ}\right)\left(\frac{D_0}{d}\right),$$

et par conséquent

$$a = \left(\frac{D_0}{d}\right)\frac{Q}{d}\left(\frac{D_0}{nQ}\right)\sqrt{D_0}.$$

Les entiers d sont assujettis à la condition que les quotients $\frac{nd}{Q}$ et $\frac{Q}{d}$ soient entiers. En représentant par ϑ le plus grand commun diviseur des deux nombres n et Q, on aura

$$n = n_1\vartheta, \qquad Q = Q_1\vartheta, \qquad (n_1\,, Q_1) \sim 1,$$

et les quotients en question seront

$$\frac{n_1 d}{Q_1}\,, \frac{Q_1\vartheta}{d}.$$

Le premier ne sera entier que si $\frac{d}{Q_1} = \delta$ est un entier, et le second

$$\frac{Q_1\vartheta}{d} = \frac{\vartheta}{\delta}$$

exige que ϑ soit un multiple de δ.

Le nombre ϑ étant fixé, on fera parcourir à δ les diviseurs de ϑ, et on posera $d = Q_1\delta$, c'est à dire $d = \frac{Q\delta}{\vartheta}$. La valeur obtenue de la somme

$$a = \left(\frac{D_0}{d}\right)\frac{Q}{d}\left(\frac{D_0}{nQ}\right)\sqrt{D_0} \quad \text{prouve que} \quad \left(\frac{D_0}{d}\right)a = \frac{Q}{d}\left(\frac{D_0}{nQ}\right)\sqrt{D_0}$$

ou bien

$$\left(\frac{D_0}{d}\right)a = \frac{1}{\delta}\left(\frac{D_0}{nQ}\right)\vartheta\sqrt{D_0}.$$

Il faut encore évaluer le signe $\mu(d)$. Les équations

$$d = Q_1\delta, \qquad Q = Q_1\vartheta$$

donnent tout de suite

$$\mu(d) = \mu(Q_1)\mu(\delta), \qquad \mu(Q) = \mu(Q_1)\mu(\vartheta),$$

d'où

$$\mu(d) = \mu(\delta)\mu(Q)\mu(\vartheta);$$

et substituant, il vient

$$\mathfrak{H}_\mu = \sum_\delta \frac{\mu(\delta)}{\delta}\left(\frac{D_0}{nQ}\right)\mu(Q)\mu(\vartheta)\vartheta\sqrt{D_0}$$

ou bien

$$\mathfrak{H}_\mu = \left(\frac{D_0}{nQ}\right)\mu(Q)\mu(\vartheta)\varphi(\vartheta)\sqrt{D_0},$$

ce qui donne le résultat voulu

$$H_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots. \alpha_\mu) = (-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\mu}\mu(Q)\mu(\vartheta)\left(\frac{D_0}{nQ}\right)\varphi(\vartheta)\sqrt{D_0}.$$

On peut remarquer encore que $\mu(Q) = (-1)^{\nu-\mu}$, et il vient

$$H_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu) = (-1)^{(\alpha_1-1)+(\alpha_2-1)+\ldots+(\alpha_\mu-1)+\nu}\mu(\vartheta)\left(\frac{D_0}{nQ}\right)\varphi(\vartheta)\sqrt{D_0}$$

ϑ désignant le plus grand commun diviseur des nombres n et Q.

Il s'agit encore d'exprimer la quantité $\sqrt{D_0}$ au moyen des racines $\sqrt{\varepsilon_1 p_1}$, $\sqrt{\varepsilon_2 p_2}$, ...

On a évidemment

$$\sqrt{\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2} = \sqrt{\varepsilon_1 p_1}\sqrt{\varepsilon_2 p_2}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\left(\frac{p_2}{p_1}\right),$$

puis

$$\sqrt{\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2 \cdot \varepsilon_3 p_3} = \sqrt{\varepsilon_1 p_1}\sqrt{\varepsilon_2 p_2}\sqrt{\varepsilon_3 p_3}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\cdot\left(\frac{p_1 p_2}{p_3}\right)\left(\frac{p_3}{p_1 p_2}\right)$$

ou bien

$$\sqrt{\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2 \cdot \varepsilon_3 p_3} = \sqrt{\varepsilon_1 p_1}\sqrt{\varepsilon_2 p_2}\sqrt{\varepsilon_3 p_3}\left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right)\left(\frac{p_3 p_1}{p_2}\right)\left(\frac{p_1 p_2}{p_3}\right)$$

et d'une manière générale

$$\sqrt{\varepsilon_1 p_1 \cdot \varepsilon_2 p_2 \cdots \varepsilon_\mu p_\mu} = \left(\frac{p_2 p_3 \cdots p_\mu}{p_1}\right)\left(\frac{p_1 p_3 \cdots p_\mu}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{p_1 p_2 \cdots p_{\mu-1}}{p_\mu}\right)$$
$$\times \sqrt{\varepsilon_1 p_1}\sqrt{\varepsilon_2 p_2}\sqrt{\varepsilon_3 p_3}\cdots\sqrt{\varepsilon_\mu p_\mu}.$$

Grâce à la loi de réciprocité, on a

$$\left(\frac{D_0}{nQ}\right) = \left(\frac{nQ}{p_1 p_2 \cdots p_\mu}\right) = \left(\frac{nQ}{p_1}\right)\left(\frac{nQ}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{nQ}{p_\mu}\right),$$

de sorte que le produit

$$\left(\frac{D_0}{nQ}\right)\left(\frac{p_2 p_3 \cdots p_\mu}{p_1}\right)\left(\frac{p_1 p_3 \cdots p_\mu}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{p_1 p_2 \cdots p_{\mu-1}}{p_\mu}\right)$$

s'écrira

$$\left(\frac{np_2 p_3 \cdots p_\nu}{p_1}\right)\left(\frac{np_1 p_3 \cdots p_\nu}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{np_1 p_2 \cdots p_{\mu-1} p_{\mu+1} \cdots p_\nu}{p_\mu}\right)$$

et il vient

$$(-1)^\nu H_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu) = (-1)^{\alpha_1 - 1}\left(\frac{nP_1'}{p_1}\right)\sqrt{\varepsilon_1 p_1}\,(-1)^{\alpha_2 - 1}\left(\frac{nP_2'}{p_2}\right)\sqrt{\varepsilon_2 p_2}$$
$$\ldots(-1)^{\alpha_\mu - 1}\left(\frac{nP_\mu'}{p_\mu}\right)\sqrt{\varepsilon_\mu p_\mu}\,\mu(\vartheta)\varphi(\vartheta)$$

en posant

$$P_1' = \frac{\Delta}{p_1}, \qquad P_2' = \frac{\Delta}{p_2}, \quad \text{etc.},$$

et ϑ désignant le produit des nombres $p_{\mu+1}, p_{\mu+2}, \ldots, p_\nu$ qui divisent le nombre n.

Si en particulier n est premier avec Δ, on aura l'expression plus simple

$$(-1)^\nu H_\mu(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu) = \prod_{\rho=1}^{\mu}\left\{(-1)^{\alpha_\rho - 1}\left(\frac{nP_\rho'}{p_\rho}\right)\sqrt{\varepsilon_\rho p_\rho}\right\}.$$

Dans ce qui précède on a supposé $\mu > 0$; pour obtenir la quantité

$$H_0 = \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{\Delta^s}{s}\right) e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}}$$

le même procédé donne d'abord

$$H_0 = \sum_d \mu(d) \sum_{m=1}^{\Delta_d} e^{\frac{2nm\pi i}{\Delta_d}}, \qquad \Delta_d = \frac{\Delta}{d}.$$

et l'on aura

$$H_0 = \mu(\Delta) = (-1)^\nu,$$

si n est premier avec Δ; le cas plus général s'établit d'une manière analogue.

En posant pour abréger

$$\Phi(\alpha_\rho) = (-1)^{\alpha_\rho - 1}\left(\frac{nP'_\rho}{p_\rho}\right)\sqrt{\varepsilon_\rho p_\rho},$$

l'équation

$$G_n = H_0 + \sum_\alpha H_1(\alpha) + \sum_{\alpha_1, \alpha_2} H_2(\alpha_1, \alpha_2) + \ldots$$

s'eérira

$$(-1)^\nu G_n = 1 + \Sigma\,\Phi(\alpha) + \sum_{\alpha_1, \alpha_2} \Phi(\alpha_1)\Phi(\alpha_2) + \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \Phi(\alpha_1)\,\Phi(\alpha_2)\,\Phi(\alpha_3) + \ldots$$

ou bien

$$(-1)^\nu G_n = (1 + \Phi(\alpha_1))(1 + \Phi(\alpha_2))(1 + \Phi(\alpha_3))\ldots(1 + \Phi(\alpha_\nu))$$

pourvu que, bien entendu, n soit premier avec Δ.

En substituant l'expression primitive de G_n, on aura la relation cherchée

$$(46) \qquad \sum_{s=1}^{\Delta-1} \varpi_s e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}} = (-1)^\nu \prod_{\rho=1}^{\nu} \frac{1 - (-1)^{\alpha_\rho}\left(\frac{nP'_\rho}{p_\rho}\right)\sqrt{\varepsilon_\rho p_\rho}}{2},$$

où $\Delta = p_1 p_2 \ldots p_\nu$, $P'_\rho = \frac{\Delta}{p_\rho}$, et l'expression ϖ_s est définie par (45^a); le nombre n est supposé positif et premier avec Δ.

Le premier membre de cette équation n'est autre chose que la somme

$$\sum e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}},$$

dans laquelle l'indice sommatoire s satisfait aux conditions $0 < s < \Delta$;

$$\left(\frac{s}{p_1}\right) = (-1)^{\alpha_1}, \qquad \left(\frac{s}{p_2}\right) = (-1)^{\alpha_2}, \quad \ldots, \quad \left(\frac{s}{p_\nu}\right) = (-1)^{\alpha_\nu}$$

et qui se compose donc de $\frac{1}{2^\nu}\varphi(\Delta)$ termes. Si en particulier on fait $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_\nu = 0$, les s seront les résidus quadratiques de Δ, premiers avec Δ.

Je vais considérer maintenant la quantité (46) dans le cas où l'entier n a un facteur commun avec Δ; soit $n = m\Delta''$, $\Delta = \Delta'\Delta''$, les deux nombres m et Δ' étant premiers entre eux. La somme

$$S = \sum_{s=1}^{\Delta} \varpi_s e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}}$$

devient

$$S = \sum_{s=1}^{\Delta'\Delta''} \varpi_s e^{\frac{2ms\pi i}{\Delta'}},$$

et on peut la transformer en faisant $s = r + k\Delta'$; il vient

$$S = \sum_{r=1}^{\Delta'} \sum_{k=0}^{\Delta''-1} \varpi_{r+k\Delta'} e^{\frac{2mr\pi i}{\Delta'}}.$$

Cela étant, représentons par $p_1, p_2, \ldots, p_\gamma$ les facteurs de Δ', et posons pour abréger

$$\varpi_s' = \prod_{\rho=1}^{\gamma} \left\{ \left(\frac{\varepsilon_\rho p_\rho}{s}\right) \frac{(-1)^{\alpha_\rho} + \left(\frac{\varepsilon_\rho p_\rho}{s}\right)}{2} \right\},$$

$$\varpi_s'' = \prod_{\rho=\gamma+1}^{\nu} \left\{ \left(\frac{\varepsilon_\rho p_\rho}{s}\right) \frac{(-1)^{\alpha_\rho} + \left(\frac{\varepsilon_\rho p_\rho}{s}\right)}{2} \right\}.$$

On a, par définition,

$$\varpi_s = \varpi_s' \varpi_s'',$$

puis comme cela se voit aisément

$$\varpi'_{s+\Delta'} = \varpi'_s, \qquad \varpi''_{s+\Delta''} = \varpi''_s,$$

d'où

$$\varpi_{r+k\Delta'} = \varpi'_{r+k\Delta'}\varpi''_{r+k\Delta'} = \varpi'_r\varpi''_{r+k\Delta'},$$

et notre somme prend la forme

$$S = \sum_{r=1}^{\Delta'} \varpi'_r e^{\frac{2mr\pi i}{\Delta'}} \sum_{k=0}^{\Delta''-1} \varpi''_{r+k\Delta'}.$$

Les deux entiers Δ' et Δ'' étant premiers entre eux, les nombres $r + k\Delta'$ $(k = 0, 1, \ldots, \Delta'' - 1)$ parcourent un système complet de restes du module Δ'', et il vient

$$\sum_{k=0}^{\Delta''-1} \varpi''_{r+k\Delta'} = \sum_{s=1}^{\Delta''} \varpi''_s = \frac{\varphi(\Delta'')}{2^{\nu-\gamma}}.$$

Donc enfin

$$S = \frac{\varphi(\Delta'')}{2^{\nu-\gamma}} \sum_{r=1}^{\Delta'} \varpi'_r e^{\frac{2mr\pi i}{\Delta'}},$$

ou en faisant usage de (46),

$$(47) \qquad \sum_{s=1}^{\Delta'\Delta''} \varpi_s e^{\frac{2ms\pi i}{\Delta'}} = (-1)^{\gamma} \frac{\varphi(\Delta'')}{2^{\nu-\gamma}} \prod_{\rho=1}^{\gamma} \frac{1 - (-1)^{\alpha_\rho}\left(\frac{m\Delta'_\rho}{p_\rho}\right)\sqrt{\varepsilon_\rho p_\rho}}{2},$$

$(\Delta' = p_1 p_2 \ldots p_\gamma,\ \ \Delta'' = p_{\gamma+1} \ldots p_\nu,\ \ \Delta'\Delta'' = \Delta,\ \ \Delta'_\rho = \frac{\Delta'}{p_\rho};$ m positif et premier avec Δ').

Les formules (46) et (47) prouvent que les sommes

$$\sum_{s=1}^{\Delta} \varpi_s e^{\frac{2ns\pi i}{\Delta}}$$

sont des quantités de la forme

$$\frac{1 \pm \sqrt{\varepsilon p}}{2}\,\frac{1 \pm \sqrt{\varepsilon' p'}}{2}\,\frac{1 \pm \sqrt{\varepsilon'' p''}}{2} \ldots,$$

et il s'ensuit que les coefficients du polynôme

$$\theta\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} p_1 p_2 \ldots p_\nu \\ \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_\nu \end{matrix}\right) = x^N + a_1 x^{N-1} + a_2 x^{N-2} + \ldots$$

sont des nombres algébriques entiers du domaine de rationalité

$$(\sqrt{\varepsilon_1 p_1}, \sqrt{\varepsilon_2 p_2}, \ldots, \sqrt{\varepsilon_\nu p_\nu}).$$

En appelant *type* de la fonction entière

$$\theta\left(x \,\middle|\, \begin{matrix} p_1 \ldots p_\nu \\ \alpha_1 \ldots \alpha_\nu \end{matrix}\right) = \theta_a(x)$$

le système des signes

$$(-1)^{\alpha_1}, (-1)^{\alpha_2}, \ldots, (-1)^{\alpha_\nu},$$

il y aura 2^ν types distinctes.

Le produit de polynômes

$$\prod_{(a)} \theta_a(x),$$

étendu à tous les 2^ν types différents, donne l'équation irréductible d'ordre $\varphi(\Delta)$ à laquelle satisfait la quantité $e^{\frac{2\pi i}{\Delta}}$. En effectuant le produit

$$\prod_{(a)}' \theta_a(x)$$

étendu aux polynômes dont les types satisfont à la condition

$$(-1)^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu} = 1 \quad \text{(types pairs)},$$

on reçoit l'expression de Gauss

$$\frac{Y(x) - \sqrt{D}\, Z(x)}{2}, \qquad D = \varepsilon_1 p_1\, \varepsilon_2 p_2 \ldots \varepsilon_\nu p_\nu.$$

Il parait que cette formation des polynômes de Gauss puisse donner l'occasion à des conclusions intéressantes.

13. Nous allons considérer un nombre quelconque (m) des discriminants fondamentaux premiers entre eux, soient $D_1, D_2, \ldots, D_m$, dont les valeurs absolues respectives soient désignées par $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$. Posons pour abréger $D = D_1 D_2 \ldots D_m$, $\Delta = |D|$, puis formons tous les produits possibles

$$D_{r_1} D_{r_2} \ldots D_{r_a} = D', \qquad \Delta' = |D'|,$$

$r_1, r_2, \ldots, r_a$ désignant une combinaison quelconque des indices $1, 2, \ldots, m$. En désignant par $r_{a+1} \ldots r_m$ la combinaison complémentaire, le produit

$$Q' = \Delta_{r_{a+1}} \ldots \Delta_{r_m}$$

sera tel que $|D'Q'| = \Delta'Q' = \Delta$; les produits D' sont évidemment des discriminants fondamentaux; je conviens d'écrire

$$F(D') = \frac{2}{\tau'} Cl(D'), \text{ si } D' \text{ est négatif, et}$$

$$F(D') = 0, \text{ si } D' \text{ est positif.}$$

En introduisant encore le symbole

$$(D', Q') = \prod_q \left(1 - \left(\frac{D'}{q}\right)\right)$$

où le produit se rattache à tous les diviseurs premiers différents q du nombre Q', et en convenant d'écrire

$$(D', 1) = 1,$$

j'aurai la formule suivante qui sera démontrée tout à l'heure

$$\frac{1}{2}\varphi(\Delta) - \frac{2^m}{\Delta}\Sigma^* s = \sum_{D'} (D', Q') F(D'); \tag{48}$$

dans le premier membre le symbole $\Sigma^* s$ signifie la somme de ceux des nombres $s = 1, 2, 3, \ldots, \Delta$ qui satisfont à des conditions simultanées

$$\left(\frac{D_1}{s}\right) = \left(\frac{D_2}{s}\right) = \ldots = \left(\frac{D_m}{s}\right) = 1;$$

dans le second membre, D' parcourt tous les produits $D_{r_1} \ldots D_{r_a}$ dont il a été question plus haut.

Afin de démontrer la formule (48), j'observe que l'on a

$$\Sigma^* s = \sum_{s=1}^{\Delta} \frac{1 + \left(\frac{D_1}{s}\right)}{2} \frac{1 + \left(\frac{D_2}{s}\right)}{2} \cdots \frac{1 + \left(\frac{D_m}{s}\right)}{2} \left(\frac{D}{s}\right) s,$$

d'où

$$2^m \Sigma^* s = \sum_{s=1}^{\Delta} \left(\frac{D}{s}\right)\left(1 + \left(\frac{D_1}{s}\right)\right)\left(1 + \left(\frac{D_2}{s}\right)\right)\left(1 + \left(\frac{D_m}{s}\right)\right) s.$$

Or le produit

$$\left(\frac{D}{s}\right)\left(1+\left(\frac{D_1}{s}\right)\right)\left(1+\left(\frac{D_2}{s}\right)\right)\cdots\left(1+\left(\frac{D_m}{s}\right)\right)$$

est égal à la somme

$$\left(\frac{D^2}{s}\right)+\sum_{D'}\left(\frac{D'}{s}\right)\left(\frac{Q'^2}{s}\right),$$

D' parcourt tous les discriminants formés de la manière indiquée plus haut. Il vient donc d'abord

$$2^m\Sigma^* s = \sum_{s=1}^{\Delta}\left(\frac{\Delta^2}{s}\right)s + \sum_{D'}\sum_{s=1}^{\Delta}\left(\frac{D'}{s}\right)\left(\frac{Q'^2}{s}\right)s;$$

la première somme

$$\sum_{s=1}^{\Delta}\left(\frac{\Delta^2}{s}\right)s$$

est la somme des entiers premiers avec Δ et plus petits que Δ, et a pour valeur l'expression $\frac{1}{2}\Delta\varphi(\Delta)$.

Ensuite, si $D'=D$, $Q'=1$, la somme

$$\sum_{s=1}^{\Delta}\left(\frac{D}{s}\right)s$$

a pour valeur la quantité $-\Delta F(D)$, et il ne s'agit que des expressions

$$S=\sum_{s=1}^{\Delta}\left(\frac{D'}{s}\right)\left(\frac{Q'^2}{s}\right)s,$$

où $Q'>1$. On les obtient au moyen de l'identité

$$\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{Q^2}{h}\right)f(h)=\sum_{d}\mu(d)\sum_{h=1}^{\infty}f(hd),$$

où d parcourt les diviseurs de Q. Il vient, en posant $Q'_d=\frac{Q'}{d}$,

$$S=\sum_{Q':d}\mu(d)\left(\frac{D'}{d}\right)\sum_{s=1}^{\Delta' Q'_d}\left(\frac{D'}{s}\right)ds.$$

Or, on a la formule générale

$$\sum_{s=1}^{n\Delta_0}\left(\frac{D_0}{s}\right)s = n\sum_{r=1}^{\Delta_0}\left(\frac{D_0}{r}\right)r = -n\Delta_0 F(D_0),$$

qui donne

$$S = -\sum_d \mu(d)\left(\frac{D'}{d}\right)dQ'_d\,\Delta' F(D') = -\Delta F(D')\sum_d \mu(d)\left(\frac{D'}{d}\right).$$

La somme

$$\sum_d \mu(d)\left(\frac{D'}{d}\right),$$

étendue à tous les diviseurs d du nombre Q', est égale au produit

$$\prod_q\left(1-\left(\frac{D'}{q}\right)\right),$$

q parcourant les différents facteurs premiers de Q'; ce produit étant désignée par (D', Q'), nous avons

$$S = -\Delta(D', Q')F(D'),$$

ce qui vérifie l'équation (48) dont nous allons signaler quelques cas particuliers

I. $\qquad m = 2; \qquad D_1 = -p, \qquad D_2 = -q,$

p et q étant deux nombres premiers de la forme $4k+3$. Parmi les produits D' qu'ont peut former des facteurs D_1 et D_2, l'un est positif; les autres sont D_1 et D_2 eux-mêmes, et il vient

$$(49)\qquad \frac{(p-1)(q-1)}{2} - \frac{4}{pq}\sum_1^{pq}{}^{*}s = \left(1-\left(\frac{q}{p}\right)\right)\frac{2}{\tau_p}Cl(-p) + \left(1-\left(\frac{p}{q}\right)\right)\frac{2}{\tau_q}Cl(-q);$$

nous y avons remplacé le symbole $\left(\frac{-p}{q}\right)$ par son équivalent $\left(\frac{q}{p}\right)$. Les

deux signes $\left(\frac{p}{q}\right)$ et $\left(\frac{q}{p}\right)$ étant opposés, d'après la loi de réciprocité, l'une des deux différences

$$1 - \left(\frac{p}{q}\right), \qquad 1 - \left(\frac{q}{p}\right)$$

sera nulle et le second membre se réduit toujours à un seul terme

II. $\qquad m = 2, \qquad D_1 = -p, \qquad D_2 = q,$

p et q étant deux nombres premiers, $p \equiv 3$, $q \equiv 1 \pmod 4$.

Il y a deux produits négatifs, $D' = -p$ et $D' = -pq$. La formule (48) devient

$$(50) \qquad \frac{(p-1)(q-1)}{2} - \frac{4}{pq}\sum_1^{pq}{}^* s = Cl(-pq) + \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)\right)\frac{2}{\tau_p}\, Cl(-p),$$

les entiers s parcourent, comme dans (49), les résidus quadratiques du module pq, premiers avec le module. En observant que l'on a

$$\frac{1}{2}(p-1)(q-1) \equiv 0 \pmod 4,$$

$$Cl(-p) \equiv 1 \pmod 2,$$

il vient, pour $p > 3$,

$$(51) \qquad Cl(-pq) \equiv 1 - \left(\frac{q}{p}\right) \pmod 4.$$

Pour $p = 3$, multiplions les deux membres par 3, et il vient d'abord

$$3Cl(-pq) \equiv 1 - \left(\frac{q}{p}\right) \pmod 4$$

d'où immédiatement la congruence précédente. La congruence (51) est donc générale, lorsque p et q sont deux nombres premiers, l'un de la forme $4k + 1$, l'autre de la forme $4k + 3$.

III. $\qquad m = 3, \quad D_1 = -p_1, \quad D_2 = -p_2, \quad D_3 = -p_3,$

les p étant des nombres premiers de la forme $4k + 3$. Dans ce cas on a les valeurs suivantes des discriminants négatifs D': $-p_1$, $-p_2$, $-p_3$, $-p_1p_2p_3$; le résultat (48) devient alors

$$\frac{1}{2}(p_1 - 1)(p_2 - 1)(p_3 - 1) - \frac{8}{p_1 p_2 p_3} \sum_1^{p_1 p_2 p_3}{}^{*} s \tag{52}$$
$$= Cl(-p_1 p_2 p_3) + \sum_{\alpha=1,2,3} \left(1 - \left(\frac{p_\beta}{p_\alpha}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{p_\gamma}{p_\alpha}\right)\right) \frac{2}{\tau_{p_\alpha}} Cl(-p_\alpha)$$

où s parcourt les résidus quadratiques du module $p_1 p_2 p_3$, et les indices α, β, γ signifient les chiffres $1, 2, 3$ pris dans un ordre quelconque.

Si les nombres p_1, p_2, p_3 sont différents de 3, le quotient $\frac{2}{\tau_{p_\alpha}}$ sera l'unité, et il vient la congruence suivante

$$(\alpha)\quad Cl(-p_1 p_2 p_3) \equiv \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{p_3}{p_1}\right)\right) + \left(1 - \left(\frac{p_3}{p_2}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right)$$
$$+ \left(1 - \left(\frac{p_1}{p_3}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{p_2}{p_3}\right)\right) + 4 \pmod 8,$$

qui peut encore se simplifier considérablement. Elle a lieu encore si $p_1 = 3$, car il suffit, dans ce cas, de multiplier les deux membres par 9 et on parvient au même résultat.

Les trois membres p ayant la forme $4k + 3$, on a, d'après la loi de réciprocité

$$\left(\frac{p_1 p_2}{p_3}\right)\left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right)\left(\frac{p_3 p_1}{p_2}\right) = -1$$

et cette égalité n'a lieu que sous l'une ou l'autre des deux hypothèses suivantes:

a) $$\left(\frac{p_1 p_2}{p_3}\right) = \left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right) = \left(\frac{p_3 p_1}{p_2}\right) = -1,$$

b) $$\left(\frac{p_1 p_3}{p_2}\right) = -1, \qquad \left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right) = \left(\frac{p_1 p_2}{p_3}\right) = 1,$$

où nous avons admis que dans le second cas les nombres p soient pris dans un ordre convenable.

Le cas de a) exige que

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -\left(\frac{p_3}{p_2}\right), \quad \left(\frac{p_2}{p_3}\right) = -\left(\frac{p_1}{p_3}\right), \quad \left(\frac{p_2}{p_1}\right) = -\left(\frac{p_3}{p_1}\right),$$

l'ordre des p étant ici arbitraire, je le fixerai par la condition $\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = 1$; on aura alors

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = \left(\frac{p_2}{p_3}\right) = \left(\frac{p_3}{p_1}\right) = 1, \qquad \left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \left(\frac{p_3}{p_2}\right) = \left(\frac{p_1}{p_3}\right) = -1.$$

L'une des deux différences $1 - \left(\frac{p_\beta}{p_\alpha}\right)$, $1 - \left(\frac{p_\gamma}{p_\alpha}\right)$ sera donc toujours nulle et la congruence (α) devient

$$Cl(-p_1p_2p_3) \equiv 4 \pmod 8.$$

Passons au second cas; les égalités b) donnent

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right) = -\left(\frac{p_2}{p_1}\right), \qquad \left(\frac{p_2}{p_1}\right) = \left(\frac{p_3}{p_1}\right), \qquad \left(\frac{p_1}{p_3}\right) = \left(\frac{p_2}{p_3}\right),$$

et le second membre de la congruence (α) sera alors

$$\left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right)^2 + \left(1 - \left(\frac{p_1}{p_3}\right)\right)^2 + 4,$$

et puisque

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\left(\frac{p_1}{p_3}\right) = -\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\left(\frac{p_3}{p_1}\right) = -\left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right) = -1,$$

l'une des deux différences $1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)$ et $1 - \left(\frac{p_1}{p_3}\right)$ sera nulle, l'autre étant égale à deux, il vient, dans ce cas, la congruence

$$Cl(-p_1p_2p_3) \equiv 0 \pmod 8.$$

Les deux cas se résument par la congruence générale

$$Cl(-p_1p_2p_3) \equiv \left(\frac{p_1 p_2}{p_3}\right) + \left(\frac{p_1 p_3}{p_2}\right) + \left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right) - 1 \pmod 8, \tag{53}$$

où p_1, p_2, p_3 signifient trois nombres premiers différents de la forme $4k+3$

IV. $m = 3$; $D_1 = p$, $D_2 = q$, $D_3 = -r$,

p, q, r étant des nombres premiers, les deux premiers de la forme $4k+1$, le dernier de la forme $4k+3$. On a ici les valeurs suivantes des discriminants D' négatifs

$$D = -pqr, \; -pr, \; -qr, \; -r,$$

et la formule (48) devient

$$(54)\qquad \frac{1}{2}(p-1)(q-1)(r-1)-\frac{8}{pqr}\sum_{1}^{pqr}{}^{*}s$$

$$= Cl(-pqr)+\left(1-\left(\frac{q}{pr}\right)\right)Cl(-pr)+\left(1-\left(\frac{p}{qr}\right)\right)Cl(-qr)$$

$$+\left(1-\left(\frac{p}{r}\right)\right)\left(1-\left(\frac{q}{r}\right)\right)\frac{2}{\tau_r}Cl(-r).$$

On en tire une congruence pour le module 8, en faisant usage du résultat (51). On aura

$$Cl(-pqr)\equiv\left(1-\left(\frac{p}{r}\right)\right)\left(1-\left(\frac{q}{pr}\right)\right)+\left(1-\left(\frac{q}{r}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p}{qr}\right)\right)$$

$$+\left(1-\left(\frac{p}{r}\right)\right)\left(1-\left(\frac{q}{r}\right)\right)\pmod 8.$$

Pour simplifier, distinguons deux cas:

a) $\qquad \left(\frac{p}{r}\right)=\left(\frac{q}{r}\right)=\varepsilon,\qquad \left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)=\varepsilon',$

b) $\qquad \left(\frac{p}{r}\right)=-\left(\frac{q}{r}\right)=\varepsilon,\qquad \left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right)=\varepsilon'.$

Dans le premier cas le second membre prend la forme

$$2(1-\varepsilon)(1-\varepsilon\varepsilon')+(1-\varepsilon)^2$$

et ce nombre est toujours congru à $(1-\varepsilon)^2=2(1-\varepsilon)$, suivant le module 8.

Dans le cas b) le second membre de la congruence en question s'écrira

$$(1-\varepsilon)(1+\varepsilon\varepsilon')+(1+\varepsilon)(1-\varepsilon\varepsilon')+(1-\varepsilon)(1+\varepsilon);$$

le dernier terme est nul et les deux premiers donnent

$$2(1-\varepsilon').$$

Le résultat est donc le suivant:

»Soient p, q, r trois nombres premiers tels que

$$p\equiv q\equiv -r\equiv 1 \pmod 4,$$

alors on a, *pour le module* 8,

$$(55)\qquad Cl(-pqr) \equiv \begin{cases} 2\left(1-\left(\frac{p}{r}\right)\right), & \text{si } \left(\frac{pq}{r}\right) = 1, \\ 2\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)\right), & \text{si } \left(\frac{pq}{r}\right) = -1, \end{cases}$$

V. $m = 4, \quad D_1 = -p_1, \quad D_2 = -p_2, \quad D_3 = -p_3, \quad D_4 = q.$

Les nombres p sont premiers de la forme $4k+3$, q est également premier mais de la forme $4k+1$. Il y a huit discriminants D' négatifs, à savoir $-p_1p_2p_3q$, $-p_1p_2p_3$, puis trois discriminants de la forme $-p_a q$ et trois discriminants $-p_a$. La formule (48) devient alors

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)(q-1) - \frac{16}{p_1p_2p_3q}\Sigma^* s \\
&= Cl(-p_1p_2p_3q) + \left(1-\left(\frac{q}{p_1p_2p_3}\right)\right)Cl(-p_1p_2p_3) \\
&+ \sum_{a=1,2,3}\left(1-\left(\frac{p_\beta}{p_a q}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_\gamma}{p_a q}\right)\right)Cl(-p_a q) \\
&+ \sum_{a=1,2,3}\left(1-\left(\frac{p_\beta}{p_a}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_\gamma}{p_a}\right)\right)\left(1-\left(\frac{q}{p_a}\right)\right)\frac{2}{\tau_{p_a}}Cl(-p_a).
\end{aligned}$$

On en déduit une congruence pour le module 16; si l'on fait usage des formules (51) et (53), elle prend la forme suivante

$$\begin{aligned}
\text{(a)}\qquad & Cl(-p_1p_2p_3q) \equiv \left(1-\left(\frac{p_1p_2p_3}{q}\right)\right)\left[\sum_{a=1,2,3}\left(\frac{p_\beta p_\gamma}{p_a}\right)-1\right] \\
&+ \sum_{a=1,2,3}\left(1-\left(\frac{p_a}{q}\right)\right)\left[\left(1-\left(\frac{p_\beta}{p_a}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_\gamma}{p_a}\right)\right)+\left(1-\left(\frac{p_\beta}{qp_a}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_\gamma}{qp_a}\right)\right)\right].
\end{aligned}$$

On en tire plusieurs conséquences:

1° Si $\left(\frac{p_1}{q}\right) = \left(\frac{p_2}{q}\right) = \left(\frac{p_3}{q}\right) = 1$, on a $Cl(-p_1p_2p_3q) \equiv 0 \pmod{16}$.

2° Si $\left(\frac{p_1}{q}\right) = \left(\frac{p_2}{q}\right) = \left(\frac{p_3}{q}\right) = -1$, la parenthèse [ ] dans la seconde somme devient

$$\left(1 - \left(\frac{p_\beta}{p_\alpha}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{p_\gamma}{p_\alpha}\right)\right) + \left(1 + \left(\frac{p_\beta}{p_\alpha}\right)\right)\left(1 + \left(\frac{p_\gamma}{p_\alpha}\right)\right) = A;$$

il est clair que $A = 0$, si les deux signes $\left(\frac{p_\beta}{p_\alpha}\right)$, $\left(\frac{p_\gamma}{p_\alpha}\right)$ sont opposés; un des deux termes dont A se compose, sera différent de zéro et aura pour valeur 4, si les deux signes en question sont égaux. Donc on a, en résumé,

$$A = 2\left[\left(\frac{p_\beta p_\gamma}{p_\alpha}\right) + 1\right],$$

et nous aurons le résultat

$$Cl(-p_1 p_2 p_3 q) \equiv -2\left[\sum_\alpha \left(\frac{p_\beta p_\gamma}{p_\alpha}\right) - 1\right] + 4\sum_\alpha \left[\left(\frac{p_\beta p_\gamma}{p_\alpha}\right) + 1\right]$$

$$\equiv 2\sum_\alpha \left(\frac{p_\beta p_\gamma}{p_\alpha}\right) + 14,$$

ou bien

$$Cl(-p_1 p_2 p_3 q) \equiv 2\left[\sum_\alpha \left(\frac{p_\beta p_\gamma}{p_\alpha}\right) - 1\right] \pmod{16}.$$

Dans le cas où

3° $$\left(\frac{p_1}{q}\right) = \left(\frac{p_2}{q}\right) = 1, \qquad \left(\frac{p_3}{q}\right) = -1,$$

la deuxième partie du second membre dans la formule (a) se réduit à un seul terme, celui où $\alpha = 3$; la parenthèse [ ] se compose alors de deux termes égaux, et le total sera toujours divisible par 16; donc ici il vient

$$Cl(-p_1 p_2 p_3 q) \equiv 2\left[\sum_\alpha \left(\frac{p_\beta p_\gamma}{p_\alpha}\right) - 1\right].$$

Enfin, l'hypothèse

4° $$\left(\frac{p_1}{q}\right) = 1, \qquad \left(\frac{p_2}{q}\right) = \left(\frac{p_3}{q}\right) = -1$$

ramène le second membre de (a) à deux termes, ceux qui résultent de la somme en y faisant $\alpha = 2$ et $\alpha = 3$; on a alors l'expression

$$2\left[\left(1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_3}{p_2}\right)\right)+\left(1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right)\left(1+\left(\frac{p_3}{p_2}\right)\right)\right]$$
$$+\,2\left[\left(1-\left(\frac{p_1}{p_3}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p_2}{p_3}\right)\right)+\left(1-\left(\frac{p_1}{p_3}\right)\right)\left(1+\left(\frac{p_2}{p_3}\right)\right)\right].$$

L'un des deux termes dont se compose l'une ou l'autre parenthèse, est nul, puisque y figurent les facteurs tels que $1 \mp \left(\frac{p_3}{p_2}\right)$; l'expression se réduit donc à la quantité

$$4\left(1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right)+4\left(1-\left(\frac{p_1}{p_3}\right)\right) \equiv -4\left(1-\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\right)+4\left(1-\left(\frac{p_1}{p_3}\right)\right)$$
$$\equiv \pm\, 4\left(1-\left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right)\right)$$

et il vient

$$Cl(-p_1 p_2 p_3 q) \equiv 4\left(1-\left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right)\right) \pmod{16}.$$

En résumé, on a le théorème suivant:

Soient p_1, p_2, p_3, q les nombres premiers différents qui satisfont à la congruence $p_1 \equiv p_2 \equiv p_3 \equiv -q \equiv -1 \pmod 4$, on a pour le module seize la congruence

$$(56)\qquad Cl(-p_1 p_2 p_3 q)$$
$$\equiv \begin{cases} 2\left[\left(\frac{p_1 p_2}{p_3}\right)+\left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right)+\left(\frac{p_3 p_1}{p_2}\right)-1\right], & \text{si } \left(\frac{p_1 p_2 p_3}{q}\right) = -1, \\ 4\left(1-\left(\frac{p_2 p_3}{p_1}\right)\right), & \text{si } \left(\frac{p_1}{q}\right)=1,\ \left(\frac{p_2}{q}\right)=\left(\frac{p_3}{q}\right)=-1, \\ 0, & \text{si } \left(\frac{p_1}{q}\right)=\left(\frac{p_2}{q}\right)=\left(\frac{p_3}{q}\right)=1. \end{cases}$$

Considérons enfin le cas

VI. $m = 4;\quad D_1 = p_1,\quad D_2 = p_2,\quad D_3 = p_3,\quad D_4 = -q,$

les nombres premiers p et q satisfaisant aux conditions

$$p_1 \equiv p_2 \equiv p_3 \equiv -q \equiv 1 \pmod 4.$$

On trouve d'abord la congruence pour le module seize

$$Cl(-p_1 p_2 p_3 q) \equiv \sum_\alpha \left(1 - \left(\frac{p_\alpha}{p_\beta p_\gamma q}\right)\right) Cl(-p_\beta p_\gamma q)$$
$$+ \sum_\alpha \left(1 - \left(\frac{p_\beta}{p_\alpha q}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{p_\gamma}{p_\alpha q}\right)\right) Cl(-p_\alpha q) + \prod_\alpha \left(1 - \left(\frac{p_\alpha}{q}\right)\right),$$

ou en faisant usage du résultat (51) et posant, pour abréger,

$$Cl(-p_1 p_2 p_3 q) = C, \qquad \left(\frac{p_\alpha}{p_\beta}\right) = \eta_\gamma, \qquad {\scriptstyle (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)}$$

$$\text{(b)} \qquad C \equiv \sum_\alpha \left(1 - \left(\frac{p_\alpha}{q}\right)\eta_\beta\eta_\gamma\right) Cl(-p_\beta p_\gamma q)$$
$$+ \sum_\alpha \left(1 - \left(\frac{p_\alpha}{q}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{p_\beta}{q}\right)\eta_\gamma\right)\left(1 - \left(\frac{p_\gamma}{q}\right)\varepsilon_\beta\right) + \prod_\alpha \left(1 - \left(\frac{p_\alpha}{q}\right)\right).$$

Pour distinguer, considérons le cas

$$\text{A.} \qquad \left(\frac{p_1}{q}\right) = \left(\frac{p_2}{q}\right) = \left(\frac{p_3}{q}\right) = \varepsilon;$$

les produits $\left(\frac{p_\beta p_\gamma}{q}\right)$ étant positifs, on tire de (55)

$$Cl(-p_\beta p_\gamma q) \equiv 2\left(1 - \left(\frac{p_\beta}{q}\right)\right) = 2(1-\varepsilon) \pmod 8,$$

et il vient, pour le module seize,

$$C \equiv 4(1-\varepsilon) + 2(1-\varepsilon)\sum_\alpha (1 - \varepsilon\eta_\beta\eta_\gamma) + (1-\varepsilon)\sum_\alpha (1-\varepsilon\eta_\beta)(1-\varepsilon\eta_\gamma).$$

Pour $\varepsilon = 1$ on a évidemment $C \equiv 0 \pmod{16}$, et il ne reste que le cas de $\varepsilon = -1$, où on aura

$$C \equiv 8 + 4\sum_\alpha (1 + \eta_\beta\eta_\gamma) + 2\sum_\alpha (1+\eta_\beta)(1+\eta_\gamma).$$

On peut changer le signe de la troisième partie puisqu'elle est divisible par 8 et il s'ensuit

$$C \equiv 8 + 2\sum_\alpha (1-\eta_\beta)(1-\eta_\gamma) \pmod 8,$$

Si maintenant $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$, il vient

$$C \equiv 8 + 6(1 - \eta)^2 \equiv 8 - 4(1 + \eta) \equiv 4(1 + \eta).$$

Dans le cas où $\eta_1 = \eta_2 = \eta$, $\eta_3 = -\eta$, il vient le même résultat

$$C \equiv 4(1 + \eta);$$

donc on a d'une manière générale

$$C \equiv 2(1 - \varepsilon)(1 + \eta),$$

η désignant le signe de la somme $\eta_1 + \eta_2 + \eta_3$.

Il nous reste encore le second cas, où

B. $$\left(\frac{p_1}{q}\right) = \left(\frac{p_2}{q}\right) = -\left(\frac{p_3}{q}\right) = \varepsilon;$$

on aura, d'après (55),

$$Cl(-p_1 p_2 q) \equiv 2(1 - \varepsilon), \qquad Cl(-p_1 p_3 q) \equiv 2(1 - \eta_2),$$
$$Cl(-p_2 p_3 q) \equiv 2(1 - \eta_1) \pmod 8,$$

et la congruence (b) devient

$$\begin{aligned} C \equiv\ & 2(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon\eta_1\eta_2) + 2(1 - \eta_2)(1 - \varepsilon\eta_1\eta_3) + 2(1 - \eta_1)(1 - \varepsilon\eta_2\eta_3) \\ & + (1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon\eta_2)(1 - \varepsilon\eta_3) + (1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon\eta_1)(1 - \varepsilon\eta_3) \\ & + (1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon\eta_1)(1 - \varepsilon\eta_2). \end{aligned}$$

Si l'on a $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta$, cette expression se simplifie comme il suit

$$4(1 - \eta)(1 - \varepsilon) + (1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon\eta)^2 \equiv 2(1 + \varepsilon)(1 - \eta).$$

Si l'on a $\eta_1 = \eta_2 = -\eta_3 = \eta$, il vient

$$\begin{aligned} C &\equiv 4(1 - \eta)(1 + \varepsilon) + 2(1 - \varepsilon)(1 + \varepsilon\eta)^2 + (1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon\eta)^2 \\ &\equiv 2(1 + \varepsilon)(1 - \varepsilon\eta) \equiv 2(1 + \varepsilon)(1 - \eta). \end{aligned}$$

Si enfin $\eta_1 = \eta_3 = \eta$, $\eta_2 = -\eta$, on trouve pour le module 16

$$C \equiv 2(1 - \varepsilon)[2 + (1 + \eta) + (1 - \varepsilon\eta)] + 2(1 + \varepsilon)(1 - \eta).$$

On n'altère pas la congruence en remplaçant la parenthèse [ ] par

$$-2+(1+\eta)+(1+\eta)=2\eta,$$

ou simplement par le nombre deux. Il vient ainsi

$$C\equiv 8+2(1+\varepsilon)(1+\eta)\pmod{16},$$

ce qu'on peut écrire, en vertu de la circonstance $\eta_1\eta_2=-1$,

$$C\equiv 2(1+\varepsilon)(1-\eta\eta_1\eta_2)+4(1-\eta_1\eta_2).$$

Cette dernière formule reproduit les deux éventualités précédentes et reste définitive pour le cas B. On a ainsi le théorème suivant:

»Les quatre nombres premiers p_1, p_2, p_3, q satisfaisant à la condition $p_1\equiv p_2\equiv p_3\equiv -q\equiv 1 \pmod 4$, posons

$$\left(\frac{p_2}{p_3}\right)=\eta_1,\quad \left(\frac{p_3}{p_1}\right)=\eta_2,\quad \left(\frac{p_1}{p_2}\right)=\eta_3,\qquad \eta=\operatorname{sgn}(\eta_1+\eta_2+\eta_3);$$

on aura alors, pour le module seize

$$(57)\quad Cl(-p_1p_2p_3q)\equiv\begin{cases} 2(1-\varepsilon)(1+\eta), \quad \text{si}\ \left(\frac{p_1}{q}\right)=\left(\frac{p_2}{q}\right)=\left(\frac{p_3}{q}\right)=\varepsilon; \\ 2(1+\varepsilon)(1-\eta\eta_1\eta_2)+4(1-\eta_1\eta_2), \\ \qquad \text{si}\ \left(\frac{p_1}{q}\right)=\left(\frac{p_2}{q}\right)=-\left(\frac{p_3}{q}\right)=\varepsilon. \end{cases}$$

14. La formule de Dirichlet (chap. II, (45))

$$\sum_1^{\frac{1}{4}D}\left(\frac{D}{\nu}\right)=\frac{1}{2}Cl(-4D)$$

permet d'étudier les restes, suivant les modules $4, 8, 16, \ldots$, des nombres de classes des discriminants pairs négatifs. Soient d'abord p, q deux nombres premiers qui satisfont à la condition $pq\equiv 1 \pmod 4$, et considérons la somme

$$A=\sum_{s=1}^{\frac{1}{4}pq}\frac{1+\left(\frac{s}{p}\right)}{2}\,\frac{1+\left(\frac{s}{q}\right)}{2}\left(\frac{s}{pq}\right)$$

qui évidemment est un entier. On a

$$4A=\sum_{1}^{\frac{1}{4}pq}\left(\frac{s}{pq}\right)+\sum_{1}^{\frac{1}{4}pq}\left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{s}{q^2}\right)+\sum_{1}^{\frac{1}{4}pq}\left(\frac{s}{q}\right)\left(\frac{s}{p^2}\right)+\sum_{1}^{\frac{1}{4}pq}\left(\frac{s}{p^2q^2}\right),$$

et la première somme a pour valeur

$$\sum_{1}^{\frac{1}{4}pq}\left(\frac{s}{pq}\right)=\frac{1}{2}Cl(-4pq);$$

pour évaluer les autres, on doit distinguer les deux formes des nombres p, q, à savoir $4k+1$ et $4k+3$.

a) Soit d'abord $p\equiv q\equiv 1 \pmod 4$, on trouve aisément

$$\sum_{1}^{\frac{1}{4}pq}\left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{s}{q^2}\right)=\frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)}{2}Cl(-4p),\qquad \sum_{1}^{\frac{1}{4}pq}\left(\frac{s}{p^2q^2}\right)=\frac{(p-1)(q-1)}{4},$$

et par conséquent

$$4A=\frac{1}{2}Cl(-4pq)+\frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)}{2}[Cl(-4p)+Cl(-4q)]+\frac{(p-1)(q-1)}{4};$$

en prenant les restes suivant le module 4, et faisant usage de la congruence connue

$$(58)\qquad Cl(-4p)\equiv\frac{p-1}{2}\equiv 1-\left(\frac{2}{p}\right) \pmod 4,$$

on aura le théorème

$$(59)\qquad \frac{1}{2}Cl(-4pq)\equiv\frac{p-q}{4}\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)\right)\equiv\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{2}{pq}\right)\right)\left(1-\left(\frac{p}{q}\right)\right) \pmod 4,$$

(p et q deux nombres premiers de la forme $4k+1$).

b) Soit maintenant $p\equiv q\equiv 3 \pmod 4$. On a d'abord

$$\sum_{1}^{\frac{1}{4}pq}\left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{s}{q^2}\right)=\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)\right)\sum_{1}^{\frac{1}{4}p}\left(\frac{s}{p}\right),$$

et la formule suivante (chap. II, (31*))

$$\sum_{1}^{\frac{1}{4}\Delta}\left(\frac{-\Delta}{a}\right)=\frac{2+\left(\frac{2}{\Delta}\right)-\left(\frac{4}{\Delta}\right)}{\tau}Cl(-\Delta)$$

donne, pour $\Delta = p$,

$$\sum_{1}^{\frac{1}{4}p}\left(\frac{s}{p}\right)=\frac{1+\left(\frac{2}{p}\right)}{2}Cl(-p),$$

formule exacte aussi pour $p = 3$. Donc

$$\sum_{1}^{\frac{1}{4}pq}\left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{s}{q^2}\right)=\frac{1+\left(\frac{2}{p}\right)}{2}\left(1-\left(\frac{q}{p}\right)\right)Cl(-p).$$

Enfin

$$\sum_{1}^{\frac{1}{4}pq}\left(\frac{s}{p^2q^2}\right)=\frac{(p-1)(q-1)}{4}+1,$$

et nous aurons

$$(60)\qquad \frac{1}{2}Cl(-4pq)\equiv\frac{1+\left(\frac{2}{p}\right)}{2}\left[1-\left(\frac{q}{p}\right)\right]+\frac{1+\left(\frac{2}{q}\right)}{2}\left[1-\left(\frac{p}{q}\right)\right]$$
$$+\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}+1 \pmod 4$$

(p, q premiers de la forme $4k+3$).

Passons maintenant aux discriminants divisibles par huit. On a pour ce but la formule (42) du chap. II,

$$\sum_{\nu=\left[\frac{1}{8}\Delta\right]+1}^{\left[\frac{3}{8}\Delta\right]}\left(\frac{-\Delta}{\nu}\right)=\frac{1}{2}Cl(-8\Delta),$$

lorsque $-\Delta$ est un discriminant fondamental, puis une formule équivalente à la formule (47) du même chapitre

$$\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{1}{8}D\right]}\left(\frac{D}{\nu}\right)+\sum_{\nu=1}^{\left[\frac{3}{8}D\right]}\left(\frac{D}{\nu}\right)=\frac{1}{2}Cl(-8D),$$

pourvu que D soit un discriminant fondamental positif. On peut remplacer les deux formules par une seule

$$\text{(A)}\qquad \sum_{1}^{\frac{3}{8}P}\left(\frac{\nu}{P}\right)+\left(\frac{-4}{P}\right)\sum_{1}^{\frac{1}{8}P}\left(\frac{\nu}{P}\right)=\frac{1}{2}Cl(-8P),$$

P désignant un produit de nombre premiers impairs différents et positifs.

Rappelons encore le théorème établi à la fin de § 5

$$Cl(-8p)\equiv 1-\left(\frac{2}{p}\right)\pmod 4,$$

p étant un nombre premier impair.

Cela étant, considérons la somme

$$A=\sum_{1}^{\frac{3}{8}pq}\frac{1+\left(\frac{s}{p}\right)}{2}\,\frac{1+\left(\frac{s}{q}\right)}{2}\left(\frac{s}{pq}\right)+\left(\frac{-4}{pq}\right)\sum_{1}^{\frac{1}{8}pq}\frac{1+\left(\frac{s}{p}\right)}{2}\,\frac{1+\left(\frac{s}{q}\right)}{2}\left(\frac{s}{pq}\right),$$

p et q étant deux nombres premiers impairs; cette somme se simplifie comme plus haut, et on a en particulier, faisant usage d'une écriture symbolique,

$$\left(\sum_{1}^{\frac{3}{8}pq}+\left(\frac{-4}{pq}\right)\sum_{1}^{\frac{1}{8}pq}\right)\left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{s}{q^2}\right)=S\left(\frac{3q}{8},\pm p\right)+\left(\frac{-4}{pq}\right)S\left(\frac{q}{8},\pm p\right)$$
$$-\left(\frac{q}{p}\right)\left[S\left(\frac{3}{8},\pm p\right)+\left(\frac{-4}{pq}\right)S\left(\frac{1}{8},\pm p\right)\right],$$

le signe $\pm$ étant celui de $\left(\frac{-4}{p}\right)$. Je désigne par $B(p,q)$ le deuxième membre, puis j'emploie la formule

$$\left(\sum_{1}^{\frac{3}{8}pq}+\left(\frac{-4}{pq}\right)\sum_{1}^{\frac{1}{8}pq}\right)\left(\frac{s}{p^2q^2}\right)=\left[\frac{3pq}{8}\right]-\left[\frac{3p}{8}\right]-\left[\frac{3q}{8}\right]$$
$$+\left(\frac{-4}{pq}\right)\left\{\left[\frac{pq}{8}\right]-\left[\frac{p}{8}\right]-\left[\frac{q}{8}\right]\right\}=C,$$

pour obtenir la formule

$$4A = \frac{1}{2}Cl(-8pq) + B(p, q) + B(q, p) + C,$$

et nous allons déterminer les restes suivant le module quatre, des différents termes dont se compose le deuxième membre.

Soit d'abord $q \equiv 1 \pmod 8$, on aura, en écrivant simplement $S(x)$ au lieu de $S(x, \pm p)$, évidemment

$$B(p, q) = \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)\right)\frac{1}{2}Cl(-8p) \equiv \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{2}{p}\right)\right]\left[1 - \left(\frac{q}{p}\right)\right] \pmod 4.$$

Dans le cas, où $q \equiv 3 \pmod 8$, il vient

$$B(p, q) = -\left[\left(\frac{-4}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)\right]\left[S\left(\frac{3}{8}\right) - \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{1}{8}\right)\right];$$

or, $S\left(\frac{1}{8}\right)$ étant un entier, on n'altère pas la congruence en changeant son signe et on a

$$B(p, q) \equiv \left[\left(\frac{-4}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)\right]\left[S\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{1}{8}\right)\right]$$

$$\equiv \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{2}{p}\right)\right]\left[\left(\frac{-4}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)\right] \pmod 4$$

ou bien

$$B(p, q) \equiv \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{2}{p}\right)\right]\left[1 + \left(\frac{-q}{p}\right)\right] \pmod 4.$$

Si l'on a $q \equiv 5 \pmod 8$, il vient d'abord

$$B(p, q) = S\left(\frac{7}{8}\right) + \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{5}{8}\right) - \left(\frac{q}{p}\right)\left[S\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{1}{8}\right)\right],$$

et si l'on fait usage de la relation (29) chap. II, à savoir

$$S(x) = -\ S(1 - x)\,\mathrm{sgn}\,D,$$

nous aurons dans notre cas

$$S(x) = -\left(\frac{-4}{p}\right)S(1 - x),$$

de sorte que

$$B(p,q) = -\left(1 + \left(\frac{q}{p}\right)\right)\left[S\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{1}{8}\right)\right]$$

d'où

$$B(p,q) = -\left[1 + \left(\frac{q}{p}\right)\right]\frac{1}{2}Cl(-8p) \equiv \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{2}{p}\right)\right]\left[1 + \left(\frac{q}{p}\right)\right] \pmod 4.$$

Soit enfin $q \equiv 7 \pmod 8$, nous aurons

$$B(p,q) = S\left(\frac{5}{8}\right) - \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{7}{8}\right) - \left(\frac{q}{p}\right)\left[S\left(\frac{3}{8}\right) - \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{1}{8}\right)\right]$$
$$= -\left[\left(\frac{-4}{p}\right) + \left(\frac{q}{p}\right)\right]\left[S\left(\frac{3}{8}\right) - \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{1}{8}\right)\right],$$

d'où il suit

$$B(p,q) \equiv \left[1 + \left(\frac{-q}{p}\right)\right]\left[S\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{-4}{p}\right)S\left(\frac{1}{8}\right)\right]$$
$$\equiv \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{2}{p}\right)\right]\left[1 + \left(\frac{-q}{p}\right)\right] \pmod 4.$$

En résumé, on a la congruence

$$B(p,q) \equiv \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{2}{p}\right)\right]\left[1 + \varepsilon_q\left(\frac{p}{q}\right)\right] \pmod 4,$$

où

$$\varepsilon_q = -1 \quad \text{pour} \quad q \equiv 1 \pmod 8, \quad \text{et} \quad \varepsilon_q = 1 \quad \text{dans d'autres cas.}$$

Quant au nombre C, l'examen des différents cas vérifie les congruences suivantes, relatives au module quatre

$$C_{p,2} \equiv \begin{cases} 1 - \left(\frac{-1}{p}\right), & \text{si } p \equiv q + 4 \pmod 8 \\ 1 - \left(\frac{2}{p}\right), & \text{si ou } p \equiv q \pmod 8, \text{ ou } p \equiv -q \equiv 1 \pmod 4. \end{cases}$$

Si l'on a $p \equiv \rho$, $q \equiv \sigma \pmod 8$, soit

$$\frac{1}{2}Cl(-8pq) \equiv J_{\rho,\sigma} \pmod 4;$$

on aura alors le tableau suivant des J:

$$J_{1,1} = 0, \quad J_{1,3} = 1 - \left(\frac{p}{q}\right), \quad J_{1,5} = 1 - \left(\frac{p}{q}\right), \quad J_{1,7} = 0,$$
$$J_{3,3} = 0, \quad J_{3,5} = 2, \quad J_{3,7} = 1 - \left(\frac{p}{q}\right),$$
$$J_{5,5} = 2, \quad J_{5,7} = 1 - \left(\frac{p}{q}\right),$$
$$J_{7,7} = 0.$$

Notons comme résultats particulièrement simples, relatifs au module huit,

$$Cl(-8pq) \equiv \begin{cases} 2\left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)\right), & \text{si } p \equiv q + 4, \ \left(\frac{2}{p}\right) = 1; \\ \left(1 - \left(\frac{2}{p}\right)\right)\left(1 + \left(\frac{-1}{p}\right)\right), & \text{si } p \equiv q. \end{cases}$$

Ces résultats, ainsi que ceux qu'on tire des formules (51), (59) et (60), ont été donnés par M. Hurwitz.[1] On pourrait continuer cette voie pour parvenir à des restes des nombres $Cl(-4pqr)$ et $Cl(-8pqr)$ pour le module seize, mais je me réserve d'y revenir à une autre occasion.

CHAPITRE IV.

1. Soient ξ, η, ξ_0, η_0 des quantités réelles et fractionnaires, qu'on peut supposer entre zéro et l'unité, alors les séries à double entrée qui figurent dans l'identité suivante

$$(1) \quad \begin{cases} v \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i[(\eta+n)\xi_0 - (\xi+m)\eta_0]}}{(\eta+n)[(\xi+m)v + (\eta+n)w]} \\ + w \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i[(\eta+n)\xi_0 - (\xi+m)\eta_0]}}{(\xi+m)[(\xi+m)v + (\eta+n)w]} \\ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i(\xi+m)\eta_0}}{\xi+m} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(\eta+n)\xi_0}}{\eta+n} \end{cases}$$

[1] Acta, t. 19.

seront convergentes, si v et w sont des quantités complexes dont le rapport ne soit pas réel.

La formule élémentaire

$$(2)\qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2k\sigma\pi i}}{u-k} = 2\pi i \frac{e^{2\sigma u\pi i}}{e^{2u\pi i}-1}, \qquad (0<\sigma<1),$$

permet de transformer les dites séries à double entrée en séries simples et à convergence rapide, en admettant toutefois que l'on peut, dans les séries doubles, intervertir l'ordre de sommation. Des considérations élémentaires que je me dispense de développer vérifient que cette dernière opération est légitime, et en remplaçant la formule (2) par la formule équivalente

$$(2')\qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\sigma\pi i(u+k)}}{u+k} = \frac{2\pi i}{1-e^{-2u\pi i}},$$

nous concluons

$$(3)\qquad \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi+m} \frac{e^{2\eta\pi i+\frac{2\pi i}{w}(v-\xi_0 v-\eta_0 w)(\xi+m)}}{e^{\frac{2v\pi i}{w}(\xi+m)+2\eta\pi i}-1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta+n} \frac{e^{\frac{2\pi i}{v}(\xi_0 v+\eta_0 w)(\eta+n)}}{e^{\frac{2w\pi i}{v}(\eta+n)+2\xi\pi i}-1}$$
$$= \frac{2\pi i e^{2\eta\pi i}}{(e^{2\xi\pi i}-1)(e^{2\eta\pi i}-1)}.$$

Pour l'exactitude de cette relation les conditions $0<\xi_0<1$, $0<\eta_0<1$ sont encore nécessaires, mais les quantités ξ et η peuvent être quelconques.

Cette relation (3) n'est qu'un cas très particulier d'une formule de transformation de la transcendante qui figure au premier membre et dont la théorie a été ébauchée par KRONECKER. Avant d'avoir eu l'occasion d'étudier le mémoire du grand géomètre, nous avons établi la formule (3) d'une manière différente[1] que je me permets de reproduire ici.

Soient v_1, v_2 deux quantités complexes dont le rapport ne soit pas réel, puis u_1 et u_2 deux quantités réelles contenues entre zéro et l'unité, enfin w_1, w_2, a des quantités complexes quelconques, et considérons l'intégrale

$$\int_C \frac{e^{2x\pi i(u_1 v_1+u_2 v_2)}}{(e^{2\pi i(v_1 x-w_1)}-1)(e^{2\pi i(v_2 x-w_2)}-1)} \frac{dx}{x+a}$$

[1] Rozpravy české Akademie, IIe année, n° 23, p. 22 (1893).

prise le long d'une ligne fermée C ne passant par aucun des pôles de la fonction sous le signe somme. Ces pôles sont

$$x = -a\,, \frac{n + w_1}{v_1}\,, \frac{n + w_2}{v_2}\,, \qquad (n = 0\,, \pm 1\,, \pm 2\,, \ldots)$$

et on peut admettre qu'ils sont différents entre eux et simples, par conséquent. Une digression tout-à-fait simple permet de voir que l'on peut faire s'éloigner à l'infini la ligne C de la sorte que la fonction sous le signe somme devient infiniment petite le long de cette ligne-là, et que par conséquent, l'intégrale tend vers zéro. D'après le théorème de CAUCHY, la somme des résidus de la fonction intégrée tendra vers zéro et l'on a ainsi

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{w_1 + av_1 + n} \frac{e^{\frac{2s\pi i}{v_1}(w_1+n)}}{e^{\frac{2\pi i}{v_1}(w_1 v_2 - w_2 v_1 + n v_2)} - 1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{w_2 + av_2 + n} \frac{e^{\frac{2s\pi i}{v_2}(w_2+n)}}{e^{\frac{2\pi i}{v_2}(w_2 v_1 - w_1 v_2 + n v_1)} - 1}$$

$$+ \frac{2\pi i e^{-2sa\pi i}}{(e^{-2\pi i(w_1 + av_1)} - 1)(e^{-2\pi i(w_2 + av_2)} - 1)} = 0,$$

où l'on a posé, pour abréger, $s = u_1 v_1 + u_2 v_2$.

Les lettres u_1 et u_2 n'entrent pas directement en cette relation, d'où il suit que s est une variable indépendante assujettie à la condition que le point s soit à l'intérieur du parallélogramme $(0\,, v_1\,, v_1 + v_2\,, v_2)$. Faisant $a = 0$, changeons w_2 en $-w_2$ et, dans la seconde série, n en $-n$; il vient

$$\text{(a)} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{w_1 + n} \frac{e^{\frac{2s\pi i}{v_1}(w_1+n)}}{e^{\frac{2v_2\pi i}{v_1}(w_1+n) + 2w_2\pi i} - 1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{w_2 + n} \frac{e^{\frac{2\pi i}{v_2}(v_1 - s)(w_2+n) + 2w_1\pi i}}{e^{\frac{2v_1\pi i}{v_2}(w_2+n) + 2w_1\pi i} - 1}$$

$$= \frac{2\pi i}{(e^{2w_2\pi i} - 1)(1 - e^{-2w_1\pi i})}.$$

Or l'équation (3), si l'on y fait $\xi_0 v + \eta_0 w = s$, s'écrira

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi + m} \frac{e^{2\eta\pi i + \frac{2\pi i}{w}(v-s)(\xi+m)}}{e^{\frac{2v\pi i}{w}(\xi+m) + 2\eta\pi i} - 1} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta + n} \frac{e^{\frac{2s\pi i}{v}(\eta+n)}}{e^{\frac{2w\pi i}{v}(\eta+n) + 2\xi\pi i} - 1}$$

$$= \frac{2\pi i e^{2\eta\pi i}}{(e^{2\xi\pi i} - 1)(e^{2\eta\pi i} - 1)}$$

et elle devient identique avec l'équation (a), en faisant

$$w_2 = \xi, \qquad w_1 = \eta, \qquad v_1 = v, \qquad v_2 = w.$$

J'introduirai maintenant les variables

$$\omega = \frac{w}{v}, \qquad \frac{s}{v} = u,$$

en supposant que la *partie imaginaire de ω soit positive*; la quantité u est supposée telle que le point qui la représente soit à l'intérieur du parallélogramme aux sommets $(0, 1, 1 + \omega, \omega)$. On aura, sous la forme définitive, la relation

$$(3^*) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta + n} \frac{e^{2u\pi i(\eta+n)}}{e^{2\omega\pi i(\eta+n)+2\xi\pi i} - 1} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi + m} \frac{e^{2\eta\pi i + \frac{2\pi i}{\omega}(1-u)(\xi+m)}}{e^{\frac{2\pi i}{\omega}(\xi+m)+2\eta\pi i} - 1}$$

$$= -\frac{\pi i}{2} \frac{e^{\eta\pi i}}{\sin \eta\pi} \frac{e^{-\xi\pi i}}{\sin \xi\pi}.$$

Nous allons nous en servir dans les cas où ξ et η sont réelles et contenues entre zéro et l'unité; sous cette hypothèse on pourra décomposer la seconde série qui figure au premier membre de (3^*),

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi + m} \frac{e^{2\eta\pi i + \frac{2\pi i}{\omega}(1-u)(\xi+m)}}{e^{\frac{2\pi i}{\omega}(\xi+m)+2\eta\pi i} - 1},$$

en séparant les termes $m \geqq 0$ des termes $m < 0$; en écrivant $-m$ au lieu de m dans ces derniers, nous aurons les deux séries

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\xi + m} \frac{e^{-\frac{2\pi i}{\omega}u(\xi+m)}}{1 - e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(\xi+m)-2\eta\pi i}} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m - \xi} \frac{e^{2\eta\pi i - \frac{2\pi i}{\omega}(1-u)(m-\xi)}}{1 - e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m-\xi)+2\eta\pi i}}.$$

Nous allons les remplacer par des séries à double entrée qui résultent en remplaçant la quantité

$$\frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m \pm \xi) \mp 2\eta\pi i}}$$

par la série géométrique, convergente dans les conditions admises,

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m \pm \xi)n \mp 2n\eta\pi i}.$$

Si, dans la seconde série ainsi obtenue, on met n au lieu de $n + 1$, le résultat s'écrira

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\xi + m} \frac{e^{2\eta\pi i + \frac{2\pi i}{\omega}(1-u)(\xi+m)}}{e^{\frac{2\pi i}{\omega}(\xi+m)+2\eta\pi i} - 1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m+\xi} e^{-2n\eta\pi i - \frac{2\pi i}{\omega}(m+\sigma)(n+u)} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m-\xi} e^{2n\eta\pi i - \frac{2\pi i}{\omega}(m-\sigma)(n-u)}.$$

C'est sous la forme suivante ainsi vérifiée que nous allons employer la formule (3^*):

$$(4) \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\eta + n} \frac{e^{2u\pi i(\eta+n)}}{e^{2\omega\pi i(\eta+n)+2\xi\pi i} - 1}$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m+\xi} e^{-2n\eta\pi i - \frac{2\pi i}{\omega}(m+\xi)(n+u)} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m-\xi} e^{2n\eta\pi i - \frac{2\pi i}{\omega}(m-\xi)(n-u)}$$

$$= -\frac{\pi i}{2} \frac{e^{-\xi\pi i}}{\sin \xi\pi}(\cot \eta\pi + i).$$

J'y pose $\eta = \frac{h}{\Delta}$, en désignant par Δ la valeur absolue d'un discriminant fondamental négatif, je multiplie de part et d'autre par le signe de Legendre $\left(\frac{-\Delta}{h}\right)$ et j'ajoute les résultats pour $h = 1, 2, \ldots, \Delta - 1$.

Les sommations relatives à h dans les deux séries à double entrées s'effectuent directement au moyen des sommes de Gauss

$$\sum_{h=1}^{\Delta-1} \left(\frac{-\Delta}{h}\right) e^{\pm \frac{2nh\pi i}{\Delta}} = \pm \left(\frac{-\Delta}{n}\right) i\sqrt{\Delta},$$

et pour obtenir sous forme simple la somme engendrée par la première série qui est à simple entrée, j'effectue la substitution $h + n\Delta = m$; on aura ainsi

$$\left(\frac{-\Delta}{h}\right) = \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{sgn} m \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{-\Delta}{h}\right)\frac{1}{m} = \left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{|m|},$$

et le résultat suivant

$$-\frac{\pi i}{2}\frac{e^{-\xi\pi i}}{\sin\xi\pi}\sum_{h=1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\cot\frac{h\pi}{\Delta}$$

$$=\Delta\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{|m|}\frac{e^{\frac{2mu\pi i}{\Delta}}}{e^{\frac{2m\omega\pi i}{\Delta}+2\xi\pi i}-1}-i\sqrt{\Delta}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{m+\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m+\xi)(n+u)}$$

$$+i\sqrt{\Delta}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{m-\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m-\xi)(n-u)}.$$

En faisant usage de la formule de LEBESGUE

$$\sum_{1}^{\Delta-1}\left(\frac{-\Delta}{h}\right)\cot\frac{h\pi}{\Delta}=\frac{4\sqrt{\Delta}}{\tau}Cl(-\Delta),$$

nous aurons donc la relation suivante

$$\text{(I)}\qquad -\frac{2\pi i}{\tau}Cl(-\Delta)\frac{e^{-\xi\pi i}}{\sin\xi\pi}$$

$$=\sqrt{\Delta}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{|m|}\frac{e^{\frac{2mu\pi i}{\Delta}}}{e^{\frac{2m\omega\pi i}{\Delta}+2\xi\pi i}-1}-i\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{m+\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m+\xi)(n+u)}$$

$$+i\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{n}\right)\frac{1}{m-\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m-\xi)(n-u)}$$

dont nous allons tirer plusieurs conséquences.

Je remplace Δ par Δ_1, τ par τ_1 en introduisant un nouveau discriminant fondamental négatif $-\Delta_2$ avec l'indice correspondant τ_2. Mais avant de commencer les calculs, nous devons transformer la première série qui figure au second membre. En l'écrivant d'abord

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}\frac{e^{\frac{2mu\pi i}{\Delta}}}{1-e^{\frac{2m\omega\pi i}{\Delta}+2\xi\pi i}}+\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}\frac{e^{-\frac{2mu\pi i}{\Delta}+\frac{2m\omega\pi i}{\Delta}-2\xi\pi i}}{1-e^{\frac{2m\omega\pi i}{\Delta}-2\xi\pi i}}$$

on la transforme en des séries à double entrée, au moyen de l'identité

$$\frac{1}{1-e^{\frac{2m\omega\pi i}{\Delta}\pm 2\xi\pi i}}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{2mn\frac{\omega\pi i}{\Delta}\pm 2n\xi\pi i}.$$

On aura ainsi au lieu de (I)

$$
(\mathrm{I}^\circ)\quad \left\{
\begin{aligned}
&-\frac{2\pi i}{\tau_1} Cl(-\Delta_1)(\cot\xi\pi - i) \\
&= -\sqrt{\Delta_1}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_1}{m}\right)\frac{1}{m} e^{\frac{2mu\pi i}{\Delta_1}+2n\xi\pi i+\frac{2mn\omega\pi i}{\Delta_1}} \\
&\quad + \sqrt{\Delta_1}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_1}{m}\right)\frac{1}{m} e^{-\frac{2mu\pi i}{\Delta_1}-2n\xi\pi i+\frac{2mn\omega\pi i}{\Delta_1}} \\
&\quad - i\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_1}{n}\right)\frac{1}{m+\xi} e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m+\xi)(n+u)} \\
&\quad + i\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_1}{n}\right)\frac{1}{m-\xi} e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m-\xi)(n-u)} .
\end{aligned}
\right.
$$

Je pose maintenant $\xi = \frac{h}{\Delta_2}$, et après avoir multiplié les deux membres par le signe de Legendre $\left(\frac{-\Delta_2}{h}\right)$, j'ajoute les résultats pour

$$h = 1,\ 2,\ \ldots,\ \Delta_2 - 1 .$$

En effectuant la sommation dans les deux dernières séries au moyen de la substitution $h + m\Delta_2 = k$, resp. $-h + m\Delta_2 = k$, nous aurons la relation

$$
\begin{aligned}
\frac{4\pi}{\tau_1\tau_2} Cl(-\Delta_1)\, Cl(-\Delta_2) &= \sqrt{\Delta_1}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_1}{m}\right)\left(\frac{-\Delta_2}{n}\right) e^{\frac{2mn\omega\pi i}{\Delta_1}} \frac{e^{\frac{2mu\pi i}{\Delta_1}} + e^{-\frac{2mu\pi i}{\Delta_1}}}{2m} \\
&\quad + \sqrt{\Delta_2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_1}{n}\right)\left(\frac{-\Delta_2}{k}\right) e^{-\frac{2nk\pi i}{\Delta_2\omega}} \frac{e^{\frac{2ku\pi i}{\Delta_2\omega}} + e^{-\frac{2ku\pi i}{\Delta_2\omega}}}{2k}
\end{aligned}
$$

ou en mettant $\Delta_1\omega$ et $\Delta_1 u$ au lieu de ω et u,

$$
(\mathrm{II})\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{4\pi}{\tau_1\tau_2} Cl(-\Delta_1)\, Cl(-\Delta_2) \\
&= \sqrt{\Delta_1}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_1}{m}\right)\left(\frac{-\Delta_2}{n}\right) e^{2mn\omega\pi i} \frac{e^{2mu\pi i} + e^{-2mu\pi i}}{2m} \\
&\quad + \sqrt{\Delta_2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_1}{m}\right)\left(\frac{-\Delta_2}{n}\right) e^{-\frac{2mn\pi i}{\Delta_1\Delta_2\omega}} \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{\Delta_2\omega}} + e^{-\frac{2nu\pi i}{\Delta_2\omega}}}{2n} .
\end{aligned}
\right.
$$

Ici on peut passer à la limite pour $u = 0$, je pose ensuite $\Delta_1 = \Delta_2$; la formule se simplifie comme il suit

$$\left(\frac{2}{\tau} Cl(-\Delta)\right)^2 \pi = \sqrt{\Delta} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{mn}\right) \frac{1}{m} \left(e^{\frac{2mn\omega\pi i}{\Delta}} + e^{-\frac{2mn\pi i}{\Delta\omega}}\right)$$

où nous avons mis $\frac{\omega}{\Delta}$ au lieu de ω. En grouppant les termes suivant les valeurs du produit $m.n = k$, la somme $\sum \frac{1}{m}$ devient $\frac{1}{k}\sum n = \frac{\theta_1(k)}{k}$, si l'on convient de représenter par $\theta_1(k)$ la somme des diviseurs du nombre k.

On aura alors, en faisant pour abréger $\omega = ix$, la relation

$$\text{(III)} \qquad Cl(-\Delta)^2 = \frac{\tau^2\sqrt{\Delta}}{4\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \frac{\theta_1(n)}{n} \left(e^{-\frac{2nx\pi}{\Delta}} + e^{-\frac{2n\pi}{\Delta x}}\right),$$

d'où pour $x = 1$ la formule encore plus simple

$$\text{(III°)} \qquad Cl(-\Delta)^2 = \frac{\tau^2\sqrt{\Delta}}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{n}\right) \frac{\theta_1(n)}{n} e^{-\frac{2n\pi}{\Delta}}.$$

L'importance pratique de cette relation n'est point considérable, puisque pour de grandes valeurs de Δ la convergence devient lente; mais cela ne veut pas dire qu'elle ne mérite pas d'intérêt.

Revenons sur la formule (II) en remettant les valeurs primitives ω et u des variables, à savoir

$$\frac{4\pi}{\tau_1\tau_2} Cl(-\Delta_1) Cl(-\Delta_2)$$

$$= \sqrt{\Delta_1} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta_1}{m}\right)\left(\frac{-\Delta_2}{n}\right) e^{\frac{2mn\omega\pi i}{\Delta_1}} \frac{e^{\frac{2mu\pi i}{\Delta_1}} + e^{-\frac{2mu\pi i}{\Delta_1}}}{2m}$$

$$+ \sqrt{\Delta_2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta_1}{m}\right)\left(\frac{-\Delta_2}{n}\right) e^{-\frac{2mn\pi i}{\Delta_2\omega}} \frac{e^{\frac{2nu\pi i}{\Delta_2\omega}} + e^{-\frac{2nu\pi i}{\Delta_2\omega}}}{2n};$$

on peut effectuer l'une des deux sommations en faisant usage de la formule

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\mu}\right) x^{\mu} = \frac{Q(x)}{1 - x^{\Delta}},$$

$Q(x)$ étant le polynôme dont il a été question dans le chapitre III; il vient ainsi

$$
\text{(IV)}\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{4\pi}{\tau_1\tau_2} Cl(-\Delta_1)Cl(-\Delta_2) \\
&= \sqrt{\Delta_1}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_1}{m}\right)\frac{e^{\frac{2mu\pi i}{\Delta_1}}+e^{-\frac{2mu\pi i}{\Delta_1}}}{2m}\,\frac{Q\left(e^{\frac{2m\omega\pi i}{\Delta_1}},-\Delta_2\right)}{1-e^{\frac{2m\Delta_2\omega\pi i}{\Delta_1}}} \\
&+ \sqrt{\Delta_2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_2}{n}\right)\frac{e^{\frac{2nu\pi i}{\Delta_2\omega}}+e^{-\frac{2nu\pi i}{\Delta_2\omega}}}{2n}\,\frac{Q\left(e^{-\frac{2n\pi i}{\Delta_2\omega}},-\Delta_1\right)}{1-e^{-\frac{2n\pi\Delta_1\pi i}{\Delta_2\omega}}},
\end{aligned}
\right.
$$

où l'on peut prendre $u = 0$. Posant par exemple $\Delta_{.} = \Delta_2$, $\omega = i$, nous aurons

$$
Cl(-\Delta)^2 = \frac{\tau^2\sqrt{\Delta}}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_1}{m}\right)\frac{1}{m}\,\frac{Q\left(e^{-\frac{2m\pi}{\Delta}}\right)}{1-e^{-2m\pi}}.
$$

Mais on parvient à des formules plus importantes, si l'on effectue les sommations au moyen des relations

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_2}{n}\right)x^n = \frac{Q(x,-\Delta_2)}{1-x^{\Delta_2}},
$$

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_2}{n}\right)\frac{x^n}{n} = \frac{1}{i\sqrt{\Delta_2}}\left(-\log c + \log\frac{A(x,-\Delta_2)}{B(x,-\Delta_2)}\right),
$$

où $\log c$ est une constante numérique connue. Or

$$
\frac{1}{i}\log\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{1}{i}\log\frac{Y - i\sqrt{\Delta}\,Z}{Y + i\sqrt{\Delta}\,Z} = -\,2\operatorname{arctg}\frac{Z\sqrt{\Delta}}{Y},
$$

et on aura

$$
\sqrt{\Delta_2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta_2}{n}\right)\frac{x^n}{n} = \gamma - 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\Delta_2}\,Z(x,-\Delta_2)}{Y(x,-\Delta_2)},
$$

en faisant $i \log c = \gamma$. La formule (II) donne alors pour $u = 0$, $\omega = ix$

$$
(\mathrm{V}) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{4\pi}{\tau_1 \tau_2} Cl(-\Delta_1) Cl(-\Delta_2) \\
&= \sqrt{\Delta_1} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta_1}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{Q\left(e^{-\frac{2mx\pi}{\Delta_1}}, -\Delta_2\right)}{1 - e^{-\frac{2m\Delta_2 x\pi}{\Delta_1}}} \\
&+ \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta_1}{m}\right) \left\{ \gamma - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\Delta_2}\, Z\left(e^{-\frac{2m\pi}{\Delta_2 x}}, -\Delta_2\right)}{Y\left(e^{-\frac{2m\pi}{\Delta_2 x}}, -\Delta_2\right)} \right\},
\end{aligned}
\right.
$$

où la constante γ doit évidemment avoir la valeur

$$\gamma = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\Delta_2}\, Z(0, -\Delta_2)}{Y(0, -\Delta_2)},$$

c'est à dire

$$\gamma = \begin{cases} 0 & \text{pour} \quad \Delta_2 > 4, \\ \dfrac{2\pi}{3} & \text{pour} \quad \Delta_2 = 3, \\ \pi & \text{pour} \quad \Delta_2 = 4. \end{cases}$$

En spécialisant Δ_2 on aura autant de formules pour le calcul de $Cl(-\Delta_1)$ que l'on voudra. Pour $\Delta_2 = 4$ on a

$$Q(z) = z - z^3, \qquad Y = 2z, \qquad Z = 1,$$

de sorte que

$$\frac{Q(z)}{1 - z^{\Delta_2}} = \frac{z}{1 + z^2}, \qquad \gamma - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\Delta_2}\, Z}{Y} = \pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{z} = 2 \operatorname{arctg} z,$$

et par conséquent, la formule (V) donne en changeant x en $\frac{1}{2x}$,

$$
(\mathrm{V}^\circ) \qquad \frac{\pi}{2\tau} Cl(-\Delta) = \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arctg} e^{-\frac{mx\pi}{\Delta}}
+ \frac{1}{4} \sqrt{\Delta} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{m \cos \operatorname{hyp} \frac{m\pi}{x}},
$$

x désignant une quantité positive arbitraire.

Si l'on fait $\Delta_2 = 3$, on aura $Q(z) = z - z^2$, $Y = 2z + 1$, $Z = 1$, de sorte que

$$\frac{Q(z)}{1 - z^3} = \frac{z - z^2}{1 - z^3},$$

$$\gamma - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\Delta_2}\, Z}{Y} = \frac{2\pi}{3} - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2z + 1} = 2 \operatorname{arctg} \frac{z\sqrt{3}}{2 + z}$$

et la formule (V) donne

$$\frac{2\pi}{3\tau} Cl(-\Delta) = \sqrt{\Delta} \sum_1^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{e^{-\frac{2mx\pi}{\Delta}} - e^{-\frac{4mx\pi}{\Delta}}}{1 - e^{-\frac{6mx\pi}{\Delta}}}$$

$$+ 2 \sum_1^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arctg} \frac{e^{-\frac{2m\pi}{3x}} \sqrt{3}}{2 + e^{-\frac{2m\pi}{3x}}}$$

ou bien

$$(\mathrm{V}^1) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{2\pi}{3\tau} Cl(-\Delta) &= \sqrt{\Delta} \sum_1^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{\sin \operatorname{hyp} \frac{mx\pi}{\Delta}}{\sin \operatorname{hyp} \frac{3mx\pi}{\Delta}} \\ &\quad + 2 \sum_1^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{1 + 2e^{\frac{2m\pi}{3x}}}. \end{aligned} \right.$$

Prenons encore $\Delta_2 = 8$, où l'on a

$$Q = z + z^3 - z^5 - z^7, \qquad Y = 2(z^2 - 1), \qquad Z = z,$$

et

$$\frac{Q}{1 - z^8} = \frac{z + z^3}{1 + z^4}.$$

Il s'ensuit

$$\frac{2\pi}{\tau} Cl(-\Delta) = \sqrt{\Delta} \sum \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \frac{1}{m} \frac{e^{-\frac{2mx\pi}{\Delta}} + e^{-\frac{6mx\pi}{\Delta}}}{1 + e^{-\frac{8mx\pi}{\Delta}}}.$$

$$+ 2 \sum_1^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{m}\right) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}\, e^{-\frac{m\pi}{4x}}}{1 - e^{-\frac{m\pi}{2x}}}$$

ou bien, en changeant x en $\frac{x}{2}$,

$$
(\mathrm{V}^2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\frac{2\pi}{\tau}Cl(-\Delta) &= \sqrt{\Delta}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\frac{1}{m}\,\frac{\cos\mathrm{hyp}\,\dfrac{mx\pi}{\Delta}}{\cos\mathrm{hyp}\,\dfrac{2mx\pi}{\Delta}} \\
&\quad + 2\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{-\Delta}{m}\right)\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{e^{\frac{m\pi}{2x}} - e^{-\frac{m\pi}{2x}}}.
\end{aligned}
\right.
$$

2. Revenons sur l'équation (4). En représentant par D une discriminant fondamental positif, posons-y $\eta = \frac{h}{D}$, multiplions de part et d'autre par $\left(\frac{D}{h}\right)$ et ajoutons les résultats pour $h = 1, 2, \ldots, D-1$. Il vient

$$
\begin{aligned}
&D\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\,\frac{e^{\frac{2mu\pi i}{D}}}{e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}+2\xi\pi i} - 1} + \sqrt{D}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{m+\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m+\xi)(n+u)} \\
&\quad + \sqrt{D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{m-\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m-\xi)(n-u)} = 0.
\end{aligned}
$$

Séparons, dans la première somme, les termes à m positif, et faisons usage de l'identité

$$
\frac{e^{\frac{2mu\pi i}{D}}}{e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}+2\xi\pi i} - 1} = -e^{\frac{2mu\pi i}{D}} - \frac{e^{\frac{2m\pi i}{D}(\omega+u)+2\xi\pi i}}{1 - e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}+2\xi\pi i}};
$$

cette transformation permettra de mettre la relation obtenue sous la forme suivante

$$
(\mathrm{VI})\qquad \left\{
\begin{aligned}
&\sqrt{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}e^{\frac{2mu\pi i}{D}} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{m+\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m+\xi)(n+u)} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{m-\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}(m-\xi)(n-u)} \\
&\quad - \sqrt{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\,\frac{e^{\frac{2m\pi i}{D}(\omega+u)+2\xi\pi i}}{1 - e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}+2\xi\pi i}} - \sqrt{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\,\frac{e^{\frac{2m\pi i}{D}(\omega-u)-2\xi\pi i}}{1 - e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}-2\xi\pi i}}.
\end{aligned}
\right.
$$

(D un discriminant positif fondamental, ω ayant sa partie imaginaire positive, puis $0 < \xi < 1$, et enfin u désignant une quantité de la forme $\sigma + \sigma'\omega$, où $0 < \sigma < 1$, $0 < \sigma' < 1$).

En passant à la limite pour $u = 0$, cette équation devient

$$(\mathrm{VI}^\circ)\quad \left\{\begin{aligned} &\sqrt{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{m+\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}n(m+\xi)} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{m-\xi}e^{-\frac{2\pi i}{\omega}n(m-\xi)} \\ &-\sqrt{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}}\left(\frac{e^{2\xi\pi i}}{1-e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}+2\xi\pi i}} + \frac{e^{-2\xi\pi i}}{1-e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}-2\xi\pi i}}\right). \end{aligned}\right.$$

La première série à double entrée qui figure au second membre contient des termes qui pour $\xi = 0$ deviennent infinis; ce sont les termes où $m = 0$ et leur somme est

$$\text{(a)}\qquad \frac{1}{\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)e^{-\frac{2n\xi\pi i}{\omega}} = \frac{1}{\xi}\,\frac{Q\left(e^{-\frac{2\xi\pi i}{\omega}}, D\right)}{1-e^{-\frac{2D\xi\pi i}{\omega}}}.$$

On peut passer à la limite pour $\xi = 0$ dans les termes qui restent, et il ne s'agit que de la limite de la quantité (a). Nous savons que pour les discriminants positifs la fonction $Q(x)$ a cette propriété que $Q(1) = 0$, $Q'(1) = 0$, et il s'ensuit que l'on aura

$$\lim_{\xi=0}\left\{\frac{1}{\xi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)e^{-\frac{2n\xi\pi i}{\omega}}\right\} = \frac{\pi i}{D\omega}Q''(1, D) = \frac{\pi i}{D\omega}\sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)h(h-1).$$

A cause de la relation

$$\sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)h = 0$$

cette quantité s'écrira

$$\frac{\pi i}{D\omega}\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)h^2,$$

et notre conséquence de l'équation (VI°), relative au cas de $\xi = 0$, prend la forme

$$\sqrt{D}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m} = \frac{\pi i}{D\omega}\sum_{1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)h^2 + 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{m}e^{-\frac{2mn\pi i}{\omega}}$$

$$-2\sqrt{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\frac{e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}}}{1-e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}}}.$$

Le premier membre a pour valeur la quantité $Cl(D)\log E(D)$, et au second membre la série à double entrée devient une série simple, si l'on effectue la sommation relative à m, en faisant usage de la série logarithmique. Posant enfin $\omega = ix$, on aura la relation

$$(\mathrm{VI}^1)\quad Cl(D)\log E(D) = \frac{\pi}{Dx}\sum_{h=1}^{D-1}\left(\frac{D}{h}\right)h^2 - 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\log\left(1-e^{-\frac{2n\pi}{x}}\right)$$

$$-2\sqrt{D}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}\frac{1}{e^{\frac{2nx\pi}{D}}-1},$$

x désignant une quantité positive arbitraire.

L'équation (VI°) fournit une formule plus commode pour le calcul numérique, si l'on y prend $\xi = \frac{1}{2}$; écrivant $2m+1=\lambda$, resp. $2m-1=\lambda$, elle devient d'abord

$$\sqrt{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m} = 4\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\lambda}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{\lambda n\pi i}{\omega}}$$

$$+2\sqrt{D}\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{D}{m}\right)\frac{1}{m}\frac{e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}}}{1+e^{\frac{2m\omega\pi i}{D}}},$$

où $\lambda = 1, 3, 5, 7, \ldots$ En faisant usage de la formule

$$2\sum_{\lambda}\frac{x^\lambda}{\lambda} = \log\frac{1+x}{1-x}$$

le second membre se simplifie et on aura, en posant comme précédemment $\omega = ix$, la formule cherchée

$$Cl(D)\log E(D) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\log\frac{1+e^{-\frac{n\pi}{x}}}{1-e^{-\frac{n\pi}{x}}}$$

$$+ 2\sqrt{D}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}\frac{1}{e^{\frac{2nx\pi}{D}}-1}.$$

Le mémoire présenté à l'Académie contient encore quelques applications de certains développements demiconvergents. Si je les supprime ici, c'est puisque j'ai en vue d'y revenir bientôt en leur ajoutant d'autres détails que j'ai dû supprimer dans le mémoire primitif.

ERRATA T. 29.

Page 344 et 345. Remplacer dans les symboles

$$\left(\frac{-\Delta}{ax^2+bxy+cy^2}\right) \text{ et } \left(\frac{-\Delta}{a\,,\,b\,,\,c}\right)$$

le numérateur $-\Delta$ par $-\Delta_1$.

Page 403, formule (31), mettre le signe »moins» devant $\left(\frac{4}{\Delta}\right)$.

LETTRE

A Monsieur le rédacteur de la Revue Générale des Sciences.

PAR

I. RICHARD

À DIJON.

Dans son numéro du 30 mars 1905, la *Revue* signale certaines contradictions qu'on rencontre dans la théorie générale des ensembles.

Il n'est pas nécessaire d'aller jusqu'à la théorie des nombres ordinaux pour trouver de telles contradictions. En voici une qui s'offre dès l'étude du continu, et à laquelle plusieurs autres se ramèneraient probablement:

Je vais définir un certain ensemble de nombres, que je nommerai l'ensemble E, à l'aide des considérations suivantes:

Ecrivons tous les arrangements deux à deux des vingt-six lettres de l'alphabet français, en rangeant ces arrangements par ordre alphabétique, puis, à la suite tous les arrangements trois à trois, rangés par ordre alphabétique, puis, à la suite, ceux quatre à quatre, etc. Ces arrangements peuvent contenir la même lettre répétée plusieurs fois, ce sont des arrangements avec répétition.

Quel que soit l'entier p, tout arrangement des vingt-six lettres p à p, se trouvera dans ce tableau, et comme tout ce qui peut s'écrire avec un nombre fini de mots est un arrangement de lettres, tout ce qui peut s'écrire se trouvera dans le tableau dont nous venons d'indiquer le mode de formation.

La définition d'un nombre se faisant avec des mots, et ceux-ci avec des lettres, certains de ces arrangements seront des définitions de nombres. Biffons de nos arrangements tous ceux qui ne sont pas des définitions de nombres.

Soit u_1 le premier nombre défini par un arrangement, u_2 le second, u_3 le troisième, etc.

On a ainsi, rangés dans un ordre déterminé, *tous les nombres définis à l'aide d'un nombre fini de mots.*

Donc: Tous les nombres qu'on peut définir à l'aide d'un nombre fini de mots forment un ensemble dénombrable.

Voici maintenant où est la contradiction. On peut former un nombre n'appartenant pas à cet ensemble.

«Soit p la $n^{\text{ième}}$ décimale du $n^{\text{ième}}$ nombre de l'ensemble E; formons un nombre ayant zéro pour partie entière, et pour $n^{\text{ième}}$ décimale $p + 1$, si p n'est égal ni à huit, ni à neuf, et l'unité dans le cas contraire.» Ce nombre N n'appartient pas à l'ensemble E. S'il était le $n^{\text{ième}}$ nombre de l'ensemble E, son $n^{\text{ième}}$ chiffre serait le $n^{\text{ième}}$ chiffre décimal de ce nombre, ce qui n'est pas.»

Je nomme G le groupe de lettres entre guillemets.

Le nombre N est défini par les mots du groupe G, c'est à dire par un nombre fini de mots; il devrait donc appartenir à l'ensemble E. Or, on a vu qu'il n'y appartient pas.

Telle est la contradiction.

Montrons que cette contradiction n'est qu'apparente. Revenons à nos arrangements. Le groupe de lettres G est un de ces arrangements; il existera dans mon tableau. Mais, à la place qu'il occupe, il n'a pas de sens. Il y est question de l'ensemble E, et celui-ci n'est pas encore défini. Je devrai donc le biffer. Le groupe G n'a de sens que si l'ensemble E est totalement défini, et celui-ci ne peut l'être que par un nombre infini de mots. *Il n'y a donc pas contradiction.*

On peut encore remarquer ceci: L'ensemble de l'ensemble E et du nombre N forme un autre ensemble. Ce second ensemble est dénombrable. Le nombre N peut être intercalé à un certain rang k dans l'ensemble E, en reculant d'un rang tous les autres nombres de rang supérieur à k. Continuons à appeler E l'ensemble ainsi modifié. Alors le groupe de mots G définira un nombre N' *différent de* N, puisque le nombre N occupe maintenant le rang k, et que le $k^{\text{ième}}$ chiffre de N' n'est pas égal au $k^{\text{ième}}$ chiffre du $k^{\text{ième}}$ nombre de l'ensemble E.

ON THE ROOTS OF THE CHARACTERISTIC EQUATION OF A LINEAR SUBSTITUTION

BY

T. J. I'A BROMWICH
in GALWAY, Ireland.

1. The equation in λ

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}-\lambda, & a_{1,2}, & a_{1,3}, & \dots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}-\lambda, & a_{2,3}, & \dots, & a_{2,n} \\ a_{3,1}, & a_{3,2}, & a_{3,3}-\lambda, & \dots, & a_{3,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & a_{n,3}, & \dots, & a_{n,n}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

has been discussed by many writers; the following results are well known.

The roots are real in case all the numbers a are *real* and such that $a_{r,s} = a_{s,r}$; that is, if the matrix of a's is symmetric.[1]

The roots have the absolute value unity, if the matrix of a's belongs to a real orthogonal substitution.[2]

The roots are pure imaginaries or zero, in case the a's are *real* and $a_{r,r} = 0$, $a_{r,s} = -a_{s,r}$; that is, if the matrix of a's is alternate.[3]

However, in spite of these results relating to special types of the matrix a, nothing was known of the nature of the roots for a general

[1] CAUCHY, 1829.
[2] BRIOSCHI, 1854.
[3] WEIERSTRASS, 1879.

matrix, until the problem was attacked by BENDIXSON [1] in 1900; he obtained upper and lower limits for the magnitude of the real and imaginary parts of the roots, taking all the numbers a to be real. The extension to the case of complex numbers a was made by HIRSCH [2] in 1902.

In what follows, we shall obtain narrower limits for the imaginary parts of the roots; incidentally, we also obtain BENDIXSON's and HIRSCH's limits for the real parts of the roots.

2. Take, in the first instance, all the a's to be *real;* and then write

$$\left.\begin{array}{lll} b_{r,r} = a_{r,r}, & b_{r,s} = \quad b_{s,r} = \frac{1}{2}(a_{r,s} + a_{s,r}), & \\ c_{r,r} = 0, & c_{r,s} = -c_{s,r} = \frac{1}{2}(a_{r,s} - a_{s,r}), & \\ A = \Sigma a_{r,s} x_r y_s, & B = \Sigma b_{r,s} x_r y_s, & C = \Sigma c_{r,s} x_r y_s. \end{array}\right\} \scriptstyle (r,s=1,2,\ldots,n)$$

It is now obvious that $A = B + C$, and that the bilinear forms B, C, are, respectively, symmetric and alternate. Following FROBENIUS, let us also write E for the unit form $\Sigma x_r y_r$ and let $|A - \lambda E|$ denote the determinant written out at the beginning of § 1, while $|B - \lambda E|$, $|C - \lambda E|$, stand for similar determinants with b's, c's in place of a's.

Suppose that $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, are the (real) roots of $|B - \lambda E|$, it is then known from a theorem due to WEIERSTRASS [3] that a *real* linear substitution can be found which, when applied to the x's and y's, reduces B to the form $B_1 = \Sigma\lambda_r x_r y_r$, while it leaves E unchanged. This substitution will change C into C_1, another alternate form with real coefficients; but it will not alter the roots of the fundamental equation. Thus the equation $|B_1 + C_1 - \lambda E| = 0$ has the same roots as $|A - \lambda E| = 0$.

Suppose now that $\lambda = \alpha + i\beta$ is one of these roots; then the bilinear form $B_1 + C_1 - (\alpha + i\beta)E$ has the rank [4] $(n - 1)$ at most. Consequently values of $x_1, x_2, \ldots, x_n$ can be chosen which make the form zero, whatever

---

[1] Öfversigt af K. Vet. Akad. Förh. Stockholm, 1900, Bd. 57, p. 1099; Acta Mathematica, t. 25, 1902, p. 359.

[2] Acta Mathematica, l. c., p. 367.

[3] Berliner Monatsberichte, 1858; Ges. Werke, Bd. 1, p. 243.

[4] Rang, according to FROBENIUS.

values may be taken for $y_1, y_2, \ldots, y_n$; naturally, the values for the x's will usually be complex, and some of them must be complex, unless β is zero. Write for these special values

$$x_r = p_r + iq_r, \qquad (r=1,2,\ldots,n)$$

and let us choose for the y's the conjugate complex numbers

$$y_r = p_r - iq_r, \qquad (r=1,2,\ldots,n)$$

it being understood that p_r and q_r are real. With these values for x_r, y_r, we find

$$B_1 = \Sigma\lambda_r(p_r^2 + q_r^2), \qquad E = \Sigma(p_r^2 + q_r^2); \qquad (r=1,2,\ldots,n)$$

further

$$x_r y_s - x_s y_r = -2i(p_r q_s - p_s q_r),$$

so that C_1 becomes a pure imaginary. But, according to what we have already explained,

$$\Sigma\lambda_r(p_r^2 + q_r^2) + C_1 - (\alpha + i\beta)\Sigma(p_r^2 + q_r^2) = 0;$$

thus, since C_1 is imaginary only, we have

$$\Sigma\lambda_r(p_r^2 + q_r^2) - \alpha\Sigma(p_r^2 + q_r^2) = 0.$$

Hence

$$\alpha = \frac{\Sigma\lambda_r(p_r^2 + q_r^2)}{\Sigma(p_r^2 + q_r^2)},$$

and consequently α lies between the greatest and least of the numbers λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$, which is one of BENDIXSON's results (l. c. Theorem II).

We proceed next to obtain a corresponding theorem for β. Let us suppose that the non-zero roots of the equation $|C - \lambda E| = 0$ are given by $\lambda = \pm i\mu_1, \pm i\mu_2, \ldots, \pm i\mu_\nu$, where $2\nu \leqq n$; so that there are $(n - 2\nu)$ zero roots of this equation. By a theorem of WEIERSTRASS,[1] stated in § 1, the numbers $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$ are all real; and they may be supposed positive without loss of generality. Further the invariant-factors of the determinant $|C - \lambda E| = 0$ are all *linear*.[1] It is then possible to find a

[1] WEIERSTRASS, Berliner Monatsberichte, 1870; Ges. Werke, Bd. 3, p. 139.

real linear substitution, which, when applied to the x's and y's, reduces C to the form

$$C_2 = \mu_1(x_1 y_2 - x_2 y_1) + \mu_2(x_3 y_4 - x_4 y_3) + \ldots + \mu_\nu(x_{2\nu-1} y_{2\nu} - x_{2\nu} y_{2\nu-1}),$$

but leaves E unchanged.[1] Owing to the nature of this substitution, B is changed to B_2 another bilinear form which is symmetric and has real coefficients. Then, just as in the last case, values of the x's can be chosen so that $B_2 + C_2 - (\alpha + i\beta)E = 0$, for all values of the y's. Let these values of the x's be given by

$$x_r = p_r + iq_r, \qquad (r=1,2,\ldots,n)$$

and take

$$y_r = p_r - iq_r. \qquad (r=1,2,\ldots,n)$$

Then

$$x_r y_r = p_r^2 + q_r^2, \qquad x_r y_s + x_s y_r = 2(p_r p_s + q_r q_s),$$

and consequently B_2 is real; but

$$x_r y_s - x_s y_r = -2i(p_r q_s - p_s q_r)$$

so that

$$C_2 = -2i[\mu_1(p_1 q_2 - p_2 q_1) + \ldots + \mu_\nu(p_{2\nu-1} q_{2\nu} - p_{2\nu} q_{2\nu-1})].$$

Hence, from the equation $B_2 + C_2 - (\alpha + i\beta)E = 0$ we deduce

$$\beta \Sigma(p_r^2 + q_r^2) = -2[\mu_1(p_1 q_2 - p_2 q_1) + \ldots + \mu_\nu(p_{2\nu-1} q_{2\nu} - p_{2\nu} q_{2\nu-1})].$$

But, in absolute value $2(p_1 q_2 - p_2 q_1)$ is not greater than $(p_1^2 + q_2^2) + (p_2^2 + q_1^2)$, and consequently

$$|\beta|\, \Sigma(p_r^2 + q_r^2) \leqq [\mu_1(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2) + \ldots + \mu_\nu(p_{2\nu-1}^2 + q_{2\nu-1}^2 + p_{2\nu}^2 + q_{2\nu}^2)].$$

From which it is clear that *the absolute value of β cannot exceed the greatest of the numbers $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$;* which is obviously analogous to Bendixson's Theorem II. We shall now see that *this theorem usually gives narrower limits for β than Bendixson's Theorem I, and cannot give wider limits.*

---

[1] That such a reduction is possible is contained implicitly in Kronecker's work on the reduction of a single bilinear form. For an explicit treatment, see my papers, Proc. Lond. Math. Soc., vol. 32, 1900, p. 321, § 4; vol. 33, 1901, p. 197, § 3; American Journal of Mathematics, vol. 23, 1901, p. 235.

For, since $\pm i\mu_1, \pm i\mu_2, \ldots, \pm i\mu_\nu$ are the non-zero roots of $|\lambda E - C| = 0$, it follows that

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 + \ldots + \mu_\nu^2$$

is equal to the coefficient of λ^{n-2} in the expanded form of the determinant; thus

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 + \ldots + \mu_\nu^2 = \frac{1}{2} \Sigma c_{r,s}^2. \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

Hence, if g is the greatest coefficient in C, we have [1]

$$\mu_1^2 + \mu_2^2 + \ldots + \mu_\nu^2 \leqq \frac{1}{2} n(n-1) g^2.$$

Thus it will usually happen that the greatest of $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\nu$ is less than $g\left[\frac{1}{2} n(n-1)\right]^{\frac{1}{2}}$; and the greatest μ can never exceed this value, which is the limit given in BENDIXSON's Theorem I.

3. Suppose now that the numbers a are *complex:* and write a' to denote the complex number conjugate to a. Then write

$$\left.\begin{aligned} b_{r,s} &= \frac{1}{2}(a_{r,s} + a'_{s,r}), & b_{s,r} &= \frac{1}{2}(a_{s,r} + a'_{r,s}), \\ ic_{r,s} &= \frac{1}{2}(a_{r,s} - a'_{s,r}), & ic_{s,r} &= \frac{1}{2}(a_{s,r} - a'_{r,s}), \end{aligned}\right\} \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

so that,

$$b'_{r,s} = b_{s,r}, \qquad c'_{r,s} = c_{s,r}. \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

Further, put

$$A = \Sigma a_{r,s} x_r y_s, \qquad B = \Sigma b_{r,s} x_r y_s, \qquad C = \Sigma c_{r,s} x_r y_s, \qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n)$$

Then it is obvious that $A = B + iC$, and that the bilinear forms B, C are forms of HERMITE's type.

Suppose now that $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ are the roots of $|B - \lambda E| = 0$; it is known that these roots are all real and that the invariant-factors of the determinant are linear.[2] It is then possible to find a linear substitution

[1] There are only $n(n-1)$ non-zero coefficients in C, because $c_{r,r} = 0$.

[2] CHRISTOFFEL, Crelle's Journal, Bd. 63, 1864, p. 252.

S (usually complex) such that when S is applied to the x's, and the conjugate substitution to the y's, the form B is reduced to $B_1 = \Sigma\lambda_r x_r y_r$, while E remains unchanged.[1] Further C is changed to C_1, another bilinear form of HERMITE's type, (in consequence of the relation between the substitutions on the x's and on the y's).

The determinantal equation then becomes $|B_1 + iC_1 - \lambda E| = 0$; thus, if a root is $\lambda = \alpha + i\beta$, we can choose the x's so as to make

$$B_1 + iC_1 - (\alpha + i\beta)E = 0,$$

whatever values we give to the y's. Suppose that these values for the x's are given by

$$x_r = p_r + iq_r, \qquad (r=1,2,\ldots,n)$$

and then take

$$y_r = p_r - iq_r = x'_r. \qquad (r=1,2,\ldots,n)$$

Thus

$$B_1 = \Sigma\lambda_r(p_r^2 + q_r^2), \qquad E = \Sigma(p_r^2 + q_r^2);$$

also, if $C_1 = \Sigma\gamma_{r,s}x_r y_s$, we have that $\gamma_{r,s}x_r y_s$ and $\gamma_{s,r}x_s y_r$ are conjugate complex numbers, because $\gamma_{s,r} = \gamma'_{r,s}$, $x_s = y'_s$, $y_r = x'_r$; further $\gamma_{r,r}x_r y_r$ is real; hence B_1, C_1, E are all three *real*. Consequently the relation

$$B_1 + iC_1 - (\alpha + i\beta)E = 0$$

gives $B_1 = \alpha E$, so that

$$\alpha = \frac{\Sigma\lambda_r(p_r^2 + q_r^2)}{\Sigma(p_r^2 + q_r^2)}.$$

Thus, just as in § 2, *α lies between the greatest and least of $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$*. This is HIRSCH's Theorem II.

But it is now clear that, if $\lambda = \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ are the roots of $|C - \lambda E| = 0$, we can similarly transform C into the form $C_2 = \Sigma\mu_r x_r y_r$, leaving E unchanged, while B becomes B_2 another HERMITE's form. Thus, by an exactly similar argument, we find that *β lies between the greatest and least of $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$*; which is the extension to complex coefficients of the theorem proved in § 2 for real coefficients.

We proceed now to show the connection between these theorems and

[1] See for example § 6 of the first, or § 5 of the last, of my papers quoted above.

HIRSCH's Theorem I. Since $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ are the roots of the equation $|B - \lambda E| = 0$, by comparing coefficients of λ^{n-1}, λ^{n-2}, we find

$$\Sigma\lambda_r = \Sigma b_{r,r}, \qquad \Sigma\lambda_r\lambda_s = \Sigma(b_{r,r}b_{s,s} - b_{r,s}b_{s,r}). \qquad (r,s=1,2,\ldots,n)$$

Thus

$$\Sigma\lambda_r^2 = \Sigma b_{r,r}^2 + \Sigma b_{r,s}b_{s,r}.$$

Hence, if g_1 is the greatest absolute value of any coefficient in B, we have

$$\Sigma\lambda_r^2 \leqq ng_1^2 + n(n-1)g_1^2,$$

or

$$\Sigma\lambda_r^2 \leqq (ng_1)^2.$$

Now we have seen that α^2 is not greater than the greatest of $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2$; and consequently α^2 is usually less than $(ng_1)^2$, while it can never be greater than this limit. That is, *α is not greater, numerically, than ng_1*. Similarly, if g_2 is the greatest absolute value of any coefficient in C, it can be proved that[1] *β is not greater, numerically, than ng_2*.

From the inequality proved above

$$\alpha^2 \leqq \Sigma b_{r,r}^2 + \Sigma b_{r,s}b_{s,r} \qquad (r,s=1,2,\ldots,n)$$

and the corresponding one

$$\beta^2 \leqq \Sigma c_{r,r}^2 + \Sigma c_{r,s}c_{s,r},$$

we find

$$\alpha^2 + \beta^2 \leqq \Sigma(b_{r,r}^2 + c_{r,r}^2) + \Sigma(b_{r,s}b_{s,r} + c_{r,s}c_{s,r}).$$

Now

$$b_{r,r}^2 + c_{r,r}^2 = a_{r,r}a'_{r,r},$$

and

$$b_{r,s}b_{s,r} + c_{r,s}c_{s,r} = \frac{1}{2}(a_{r,s}a'_{s,r} + a_{s,r}a'_{r,s}),$$

so that

$$\alpha^2 + \beta^2 \leqq \Sigma a_{r,r}a'_{r,r} + \Sigma a_{r,s}a'_{s,r}. \qquad (r,s=1,2,\ldots,n)$$

Thus, if g_3 is the greatest absolute value of any coefficient in A, we have

$$\alpha^2 + \beta^2 \leqq ng_3^2 + n(n-1)g_3^2,$$

[1] If it happens that the coefficients in C are pure imaginaries, so that $c_{r,r} = 0$, $c_{r,s} = -c_{s,r}$, it can be proved (as in § 2) that

$$|\beta| \leqq g_2\left[\frac{1}{2}n(n-1)\right]^{\frac{1}{2}}.$$

or

$$|\alpha + i\beta| \leqq ng_2.$$

That is, *the absolute value of* $(\alpha + i\beta)$ *is not greater than* ng_2.

The results

$$|\alpha| \leqq ng_1, \qquad |\beta| \leqq ng_2, \qquad |\alpha + i\beta| \leqq ng_2$$

constitute Hirsch's Theorem I, which is therefore included in the general theorem obtained previously.

4. I have also attempted to obtain some relation between the indices of the invariant-factors of $|A - \lambda E|$, and those of [1] $|\lambda B + \mu C|$; but hitherto I have not succeeded in finding any general theorem in this connection. The two following examples show that the relation (if there is one) is not very obvious.

If

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda, & 2, & 4 \\ 0, & 1-\lambda, & 6 \\ 0, & 0, & 1-\lambda \end{vmatrix}, \qquad \text{[*One* invariant-factor } (\lambda - 1)^3]$$

then

$$|\lambda B + \mu C| = \begin{vmatrix} \lambda, & \lambda+\mu, & 2(\lambda+\mu) \\ \lambda-\mu, & \lambda, & 3(\lambda+\mu) \\ 2(\lambda-\mu), & 3(\lambda-\mu), & \lambda \end{vmatrix}. \qquad \text{[*Three* invariant-factors } \lambda(\lambda^2 - 2\mu^2)]$$

Again if $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a-\lambda, & -1 \\ 1, & -\lambda \end{vmatrix}$, then $|\lambda B + \mu C| = \begin{vmatrix} a\lambda, & -\mu \\ \mu, & 0 \end{vmatrix}$.

In this case both determinants have a squared invariant-factor if $a^2 = 4$; but if a has any other value, the first has two different invariant-factors $(\lambda^2 - a\lambda + 1)$, while the second has always a squared invariant-factor (μ^2).

Dublin, 11th October, 1904.

[1] It is obviously hopeless to use the invariant-factors of $|B - \lambda E|$ and $|C - \lambda E|$, because these are always *linear;* while $|A - \lambda E|$ may have invariant-factors of any degree up to n. In this paragraph the a's are supposed real, so that B and C are deduced from A according to § 2 (not § 3).

Inhaltsverzeichniss. Table des matières.

Seite. Pages.

LERCH, M., Essais sur le calcul du nombre des classes de formes quadratiques binaires aux coefficients entiers ... 203—293

RICHARD, I., Lettre à Monsieur le rédacteur de la Revue Générale des Sciences ... 295—296

BROMWICH, T. J. I'A. On the roots of the characteristic equation of a linear substitution ... 297—304

ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

30 : 4

STOCKHOLM
BEIJERS BOKFÖRLAGSAKTIEBOLAG.
1906.

CENTRALTRYCKERIET, STOCKHOLM

BERLIN
MAYER & MÜLLER
PRINZ LOUIS FERDINANDSTRASSE 2

PARIS
A. HERMANN.
6 RUE DE LA SORBONNE

SUR LA RÉSOLUTION QUALITATIVE DU PROBLÈME RESTREINT DES TROIS CORPS

PAR

T. LEVI-CIVITA

à PADOUE.

Dans le problème des trois corps (points matériels, qui s'attirent suivant la loi de NEWTON) les forces et par conséquent les équations différentielles du mouvement se comportent d'une façon analytique régulière tant que les positions des trois points restent distinctes.

D'après cela il est presque évident qu'il ne peut y avoir autre raison de singularité pour le mouvement en dehors de la circonstance que deux des trois corps (ou tous les trois) se rapprochent indéfiniment.

Plus précisément M. PAINLEVÉ [1] a démontré qu'à partir de conditions initiales données des singularités peuvent se présenter alors seulement qu'une au moins des distances mutuelles tend vers zéro pour t convergent vers une valeur finie t_1.

Quoi qu'il en soit, les résultats récents de M. MITTAG-LEFFLER sur les représentations des branches monogènes des fonctions analytiques permettent d'affirmer que:

Dans le problème des trois corps les coordonnées sont exprimables *en tout cas et pendant toute la durée du mouvement* par des séries jouissant des propriétés fondamentales des séries de TAYLOR.

Soit en effet x une quelconque de ces coordonnées. D'après la conclusion de M. PAINLEVÉ, rappelée tout à l'heure, la fonction $x(t)$ reste

---

[1] Voir ses »Leçons etc., professées à Stockholm», chez A. Hermann, Paris 1897, p. 583.

régulière pour toutes les valeurs de t, qu'il y a lieu de considérer: savoir de l'instant initial t_0 jusqu'à l'infini dans le cas général où il n'y a pas de choc au bout d'un temps fini; de t_0 à t_1 (ce dernier instant exclu) lorsque le choc intervient.

Dans les deux cas les intervalles de l'axe réel (t_0, ∞), (t_0, t_1) sont intérieurs à l'étoile de M. MITTAG-LEFFLER se rapportant au point t_0. Les équations du mouvement fournissent d'ailleurs, en fonction des données initiales, les dérivées successives de la fonction $x(t)$ au centre t_0 de l'étoile. Il suffit donc de construire, en se servant de ces valeurs, un des développements indiqués par M. MITTAG-LEFFLER pour en tirer une expression de $x(t)$, embrassant toute la durée du mouvement.

On peut dire que le problème est résolu. Mais (tout en restant dans le terrain théorique, où l'on fait abstraction de la complexité des moyens employés) ce n'est pas une résolution complète. Elle est, pour ainsi dire, aridement quantitative et ne nous laisse pas apercevoir la nature du mouvement.

A ce point de vue se pose d'abord la question de la prévision des chocs: conditions à être remplies par les circonstances initiales pour que deux des trois corps, ou tous les trois, se choquent au bout d'un temps fini.

La première partie de cette question, dont je m'étais occupé pour le cas particulier du problème restreint [1], vient d'être brillament discutée par M. BISCONCINI. [2]

La seconde attend encore une réponse. Mais, lors même qu'on en possèderait une, il ne serait pas encore permis de tirer des conséquences astronomiques. En effet les corps célestes ne sont pas des points matériels et il est loisible de les traiter ainsi pourvu seulement que leurs dimensions soient négligeables par rapport aux distances, c'est-à-dire (dimensions et degré d'approximation étant donnés) pourvu que leurs distances ne descendent pas au dessous d'une certaine limite ε. A cette condition seulement les résultats mathématiques seront acceptables.

En l'espèce, pour pouvoir affirmer qu'à partir d'un état initial donné, le mouvement se poursuivra régulièrement, il faudra être certain que les distances restent supérieures à l'ε susdit.

---

[1] *Traiettorie singolari ed urti nel problema ristretto dei tre corpi*, Annali di Matematica, Ser. III, T. 9, 1903.

[2] *Sur le problème des trois corps etc.*, dans ce même volume des Acta.

Reconnaître d'avance sur les données initiales quand il en est ainsi, voilà le but essentiel de l'analyse qualitatif de notre problème.

J'ai réussi à faire un petit pas pour le cas particulier du problème restreint. Voici d'une façon précise le contenu de ma recherche.

Rappelons d'abord qu'il s'agit dans le problème restreint du mouvement plan d'un corps P (de masse négligeable) attiré par deux autres S, J tournant uniformément autour de leur centre de gravité.

La distance $\overline{SJ}$ restant constante, on doit se préoccuper seulement de $\overline{PS}, \overline{PJ}$, et il suffit d'en envisager une, $\overline{PS}$ par exemple, puisque les mêmes considérations s'appliquent évidemment à l'autre.

Cela étant, je me suis proposé l'étude des trajectoires du système (courbes décrites par le point P) dans une région suffisamment petite D entourant le centre S.

Les équations différentielles du mouvement présentent, comme il est évident d'après la nature newtonienne de la force, des singularités au point S. Mais on peut les régulariser (le sens de ce mot n'a pas besoin d'explications) par une transformation convenable. On peut notamment, en ayant recours à l'équation de HAMILTON-JACOBI, caractériser d'une façon très nette les trajectoires de la région D. On en tire sans peine une représentation sous forme holomorphe de tous les arcs de trajectoire A, possibles à l'intérieur de D. Aucun de ces arcs ne peut se rapprocher indéfiniment de S sans le rejoindre jamais, c'est-à-dire tout arc A, ne passant pas exactement au point S, en reste à une distance finie. La moindre distance δ du point S à l'arc A peut être exprimée en fonction (uniforme à l'intérieur de D) d'un quelconque des états de mouvement de P sur A.

Ou bien $\delta = 0$; c'est la condition du choc. Ou bien $\delta > 0$. On peut affirmer que sur l'arc A le mouvement se poursuit régulièrement. Si au surplus $\delta > \varepsilon$, il sera permis d'attribuer un sens physique au résultat mathématique.

Rien n'autorise toutefois des prévisions à longue échéance ($\delta > \varepsilon$, ni même $\delta > 0$ quel que soit t).

C'est là une remarque essentielle, que je dois à l'obligeance de M. PHRAGMÉN.

On conçoit en effet qu'on puisse, en suivant une trajectoire déterminée, sortir de D le long d'un arc A, et y rentrer le long d'un arc différent

A', et ainsi de suite, avec des nouveaux δ, ayant même zéro pour limite inférieure.

Il arrive sans doute — l'exemple étant offert (§ 8) déjà par le cas élémentaire, où la masse de J serait nulle — qu'une trajectoire pénètre dans D une infinité de fois par une série d'arcs A, qui, tout en étant en continuation analytique, se présentent à l'intérieur de D comme des éléments distincts.

Sur la limite inférieure des δ je ne puis rien dire: tous mes efforts dans cette direction ont complètement échoué.

L'analyse de ce qui se passe au voisinage de S ne suffit donc pas à épuiser la question tout en fournissant des renseignements dignes d'intérêt.

Pour résumer sous forme expressive on peut énoncer la conclusion suivante:

Si $\delta > \varepsilon$ il n'y a rien à craindre pour le moment du voisinage de S. Seuls des rapprochements *nouveaux* (c'est-à-dire précédés par des sorties de D) pourraient devenir dangereux.

Qu'il me soit permis de saisir l'occasion pour adresser tous mes remerciements à MM. MITTAG-LEFFLER et PHRAGMÉN, qui ont honoré ma recherche de leur intérêt bienveillant.

---

§ 1. *Equations du mouvement. — Forme canonique usuelle.*

Soit P celui des trois corps, dont la masse est négligeable et n'exerce par conséquent aucune influence sur le mouvement des deux autres S, J. Ce mouvement est alors képlérien. On suppose qu'il soit le plus simple possible, c'est-à-dire que les deux corps S et J tournent uniformément autour de leur centre de gravité commun O. On suppose encore que le corps P se meut dans le plan, qui contient les deux orbites circulaires de S et de J.

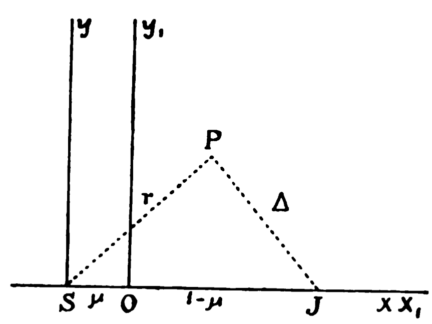
On est ramené de la sorte à un problème avec deux degrés de liberté: Mouvement plan d'un point P, sollicité par l'attraction newtonienne de deux centres variables S et J.

Convenons de prendre comme unité de masse la somme des masses des deux corps S et J; si μ désigne la masse de J, $\nu = 1 - \mu$ sera alors celle de S.

Convenons encore de prendre la distance constante $\overline{SJ}$ pour unité de distance et de fixer l'unité de temps de façon que la vitesse angulaire de la droite SJ soit égale à l'unité. Dès lors la constante de la gravitation universelle résulte, elle aussi, égale à l'unité, et le potentiel des forces agissantes sur l'unité de masse de P est

$$\frac{\nu}{r} + \frac{\mu}{\Delta},$$

en désignant par r et Δ les distances $\overline{PS}$ et $\overline{PJ}$.



Rapportons-nous pour un moment à deux axes mobiles Ox_1, Oy_1 ayant OJ comme direction positive de l'axe x_1, et, comme direction positive de l'axe y_1, celle qu'on obtient de OJ en tournant de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens de la rotation de la droite SJ.

Comme O est le centre de gravité de S et de J et $\overline{SJ} = 1$, les coordonnées de S sont: $-\mu, 0$; celles de J: $1-\mu, 0$.

Ceci posé, d'après le théorème de Coriolis, les composantes de l'accélération absolue d'un point mobile quelconque P (ayant $x_1(t)$, $y_1(t)$ pour coordonnées par rapport à nos axes) seront

$$x_1'' - 2y_1' - x_1,$$
$$y_1'' + 2x_1' - y_1,$$

les accents indiquant des dérivations par rapport au temps t.

Les équations du mouvement s'obtiennent en égalant l'accélération à la force, qui agit sur l'unité de masse.

Elles sont donc ici:

$$x_1'' - 2y_1' - x_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\nu}{r} + \frac{\mu}{\Delta}\right),$$

$$y_1'' + 2x_1' - y_1 = \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\nu}{r} + \frac{\mu}{\Delta}\right).$$

Passons maintenant de x_1, y_1 à un système d'axes parallèles x, y, ayant pour origine le point S.

Les formules de transformation

$$x_1 = x - \mu, \qquad y_1 = y$$

donnent

$$(1) \qquad \begin{cases} x'' - 2y' - x = -\mu + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\nu}{r} + \dfrac{\mu}{\Delta}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\nu}{r} + \mu V\right), \\ y'' + 2x' - y = \qquad \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\nu}{r} + \dfrac{\mu}{\Delta}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\nu}{r} + \mu V\right), \end{cases}$$

ayant posé pour abréger

$$V = \frac{1}{\Delta} - x.$$

Je pose encore

$$(2) \qquad \begin{cases} x' = p + y, \\ y' = q - x, \end{cases}$$

et je puis alors écrire les équations (1) sous la forme:

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \quad q + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\nu}{r} + \mu V\right), \\ \dfrac{dq}{dt} = -p + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\nu}{r} + \mu V\right). \end{cases}$$

Les deux équations du second ordre (1) se trouvent ainsi remplacées par le système équivalent d'équations du premier ordre (2), (3) aux quatre fonctions inconnues x, y, p, q.

C'est un système canonique, dont la fonction caractéristique est

$$(4) \qquad F = \frac{1}{2}\{(p+y)^2 + (q-x)^2\} - \left\{\frac{\nu}{r} + \frac{1}{2}r^2 + \mu V\right\},$$

et les variables conjuguées $x, p; y, q$.

On constate en effet immédiatement que les équations (2) et (3) sont bien identiques aux suivantes:

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial p}, & \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial q}; \\[2ex] \dfrac{dp}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial x}, & \dfrac{dq}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial y}. \end{cases}$$

Il convient de remarquer:

1° que les auxiliaires p et q, définies par (2), ne sont que les composantes de la vitesse absolue du mobile (plus précisément de la vitesse de P par rapport à un système de direction invariable ayant l'origine en S);

2° que les équations (I) admettent l'intégrale (dite de Jacobi)

$$F = -C.$$

En désignant par v la grandeur de la vitesse relative (aux composantes x', y'), la dite intégrale s'écrit, d'après (4) et (2),

$$(5) \qquad \frac{1}{2}v^2 - \left\{\frac{\nu}{r} + \frac{1}{2}r^2 + \mu V\right\} = -C.$$

§ 2. *Autre forme canonique. — Régularisation au point S.*

Une transformation du système (I), qui donne lieu à des conséquences remarquables, s'obtient en posant

$$(6) \qquad x + iy = (\xi + i\eta)^2,$$

$$(7) \qquad p - iq = \frac{\varpi - i\chi}{2(\xi + i\eta)} \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

où il est sous-entendu qu'on doit séparément égaler dans les deux membres les coefficients de i et les termes qui en sont indépendants.

Les deux séries conjuguées x, y; p, q sont de la sorte liées aux deux nouvelles séries ξ, η; ϖ, χ par une transformation de contact. Il suit en effet de (6)

$$dx + idy = 2(\xi + i\eta)(d\xi + id\eta),$$

d'où, en multipliant membre à membre avec l'équation (7),

$$(p - iq)(dx + idy) = (\varpi - i\chi)(d\xi + id\eta),$$

ce qui donne en particulier

$$pdx + qdy = \varpi d\xi + \chi d\eta.$$

En posant

$$\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 \tag{8}$$

et en tenant compte que r n'est autre que $|\sqrt{x^2 + y^2}|$, on obtient aisément de (6) et (7)

$$\tag{9} \begin{cases} r = \rho^2, \\ p^2 + q^2 = \dfrac{\varpi^2 + \chi^2}{4\rho^2}, \\ xp + yq = \dfrac{1}{2}(\xi\varpi + \eta\chi), \\ yp - xq = \dfrac{1}{2}(\eta\varpi - \xi\chi). \end{cases}$$

Appliquons maintenant le changement de variables (6) et (7) au système différentiel (I).

D'après l'identité

$$pdx + qdy = \varpi d\xi + \chi d\eta,$$

le système transformé en ξ, η, ϖ, χ sera encore canonique avec la même fonction caractéristique F, qu'on doit seulement exprimer par les nouvelles variables.

Nous aurons donc

$$\tag{I'} \begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial \varpi}, \quad \dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{\partial F}{\partial \chi}; \\ \dfrac{d\varpi}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial \xi}, \quad \dfrac{d\chi}{dt} = -\dfrac{\partial F}{\partial \eta}. \end{cases}$$

Quant à F, les (4) et (9) donnent après coup

$$F = \frac{1}{8\rho^2}\{(\varpi + 2\rho^2\eta)^2 + (\chi - 2\rho^2\xi)^2\} - \left\{\frac{\nu}{\rho^2} + \frac{1}{2}\rho^4 + \mu V\right\}, \tag{4'}$$

$V = \frac{1}{\Delta} - x$ étant une fonction régulière tant que $\overline{PS} < 1$, c'est-à-dire, d'après (6), tant que $\xi^2 + \eta^2 < 1$. Pour notre but il suffit d'ailleurs de retenir que c'est une fonction holomorphe pour $|\xi|$, $|\eta|$ assez petits.

Il ne me paraît pas sans intérêt de faire remarquer (tout en n'ayant pas à m'en servir dans ce qui va suivre) que le système (I') peut être régularisé au point S.

Voici de quelle façon.

Introduisons une variable auxiliaire τ d'après la position

$$d\tau = \frac{dt}{\rho^2}.$$

Tant que le mouvement se poursuit régulièrement $\rho^2 = r$ n'est pas nul (ni infini). Il y a donc correspondance biunivoque entre t et τ, et on peut bien considérer cette dernière, au lieu de t, comme variable indépendante. Faisons ce changement dans les équations différentielles (I'). On n'a qu'à y remplacer dt par $\rho^2 d\tau$, ce qui donne:

$$\frac{d\xi}{d\tau} = \rho^2 \frac{\partial F}{\partial \varpi}, \qquad \frac{d\eta}{d\tau} = \rho^2 \frac{\partial F}{\partial \chi};$$

$$\frac{d\varpi}{d\tau} = -\rho^2 \frac{\partial F}{\partial \xi}, \qquad \frac{d\chi}{d\tau} = -\rho^2 \frac{\partial F}{\partial \eta}.$$

Comme $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$, et F a, pour toute solution de (I'), une valeur constante $-C$, on peut écrire:

$$\rho^2 \frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{\partial(\rho^2 F)}{\partial \xi} - 2\xi F = \frac{\partial(\rho^2 F)}{\partial \xi} + 2C\xi = \frac{\partial}{\partial \xi}[\rho^2(F + C)].$$

De même

$$\rho^2 \frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}[\rho^2(F + C)].$$

Il suffit donc de poser

$$H = \rho^2(F + C) = \frac{1}{8}\{(\varpi + 2\rho^2\eta)^2 + (\chi - 2\rho^2\xi)^2\} - \left\{\nu - C\rho^2 + \frac{1}{2}\rho^6 + \mu\rho^2 V\right\}$$

pour pouvoir présenter le système précédent sous la forme

$$
(\mathrm{I}'') \qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{d\tau} = \dfrac{\partial H}{\partial \varpi}, & \dfrac{d\eta}{d\tau} = \dfrac{\partial H}{\partial \chi}; \\[2ex] \dfrac{d\varpi}{d\tau} = -\dfrac{\partial H}{\partial \xi}, & \dfrac{\partial \chi}{d\tau} = -\dfrac{\partial H}{\partial \eta}, \end{cases}
$$

qui est encore canonique et parfaitement régulier au point S.

Toute solution de (I') [ou de (I)] donne lieu à une solution de (I''), pour laquelle $H = 0$, et réciproquement (la constante C ayant même valeur dans les deux cas).

§ 3. *Équation de Hamilton-Jacobi. — Déduction d'une intégrale complète W.*

L'équation de Hamilton-Jacobi, relative au système (I'), s'obtient de suite en égalant la fonction caractéristique (4') à une constante et en y entendant

$$\varpi = \frac{\partial W}{\partial \xi}, \qquad \chi = \frac{\partial W}{\partial \eta}.$$

Je désignerai la constante par $-C$, et je pourrai écrire, en chassant le dénominateur ρ^2.

$$(10) \qquad \frac{1}{8}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial \xi} + 2\rho^2\eta\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} - 2\rho^2\xi\right)^2\right\} = \nu - C\rho^2 + \frac{1}{2}\rho^6 + \mu\rho^2 V.$$

L'équation analogue pour le système complètement régularisé (I'') serait

$$H = \text{const.},$$

ce qui revient encore à (10) lorsqu'on donne à la constante du second membre la valeur zéro.

Ceci remarqué en passant, faisons subir aux variables indépendantes ξ, η une substitution orthogonale

$$\xi + i\eta = e^{i\alpha}(\xi_1 + i\eta_1) \quad (\alpha \text{ constante réelle}).$$

Les binômes

$$\xi^2 + \eta^2,$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta}\right)^2,$$

$$\eta \frac{\partial W}{\partial \xi} - \xi \frac{\partial W}{\partial \eta}$$

sont des invariants et on peut écrire de suite comme transformée de l'équation précédente

$$(10') \quad \frac{1}{8}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial \xi_1} + 2\rho^2\eta_1\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta_1} - 2\rho^2\xi_1\right)^2\right\} = \nu - C\rho^2 + \frac{1}{2}\rho^6 + \mu\rho^2 V_1,$$

où V_1 est ce que devient V en y remplaçant ξ, η par $\xi_1 \cos\alpha - \eta_1 \sin\alpha$, $\xi_1 \sin\alpha + \eta_1 \cos\alpha$. V_1 est donc une fonction de ξ_1, η_1, α, périodique par rapport à α et regulière tant que $|\xi_1|, |\eta_1|$ demeurent assez petits.

L'équation (10'), quadratique par rapport à $\frac{\partial W}{\partial \xi_1}$, a deux racines, se réduisant respectivement à $\pm\sqrt{8\nu}$ pour la valeur zéro des trois autres arguments $\xi_1, \eta_1, \frac{\partial W}{\partial \eta_1}$.

Le théorème général d'existence relatif aux équations aux dérivées partielles du premier ordre, nous permet ainsi d'affirmer qu'il existe deux intégrales de (10'), holomorphes au voisinage de $\xi_1 = \eta_1 = 0$ et se réduisant à zéro pour $\xi_1 = 0$. Leurs développements en série de puissances de ξ_1, η_1 peuvent être calculés de proche en proche, en partant de l'une ou de l'autre des deux expressions de $\frac{\partial W}{\partial \xi_1}$ fournies par (10').

Fixons par exemple celle, pour qui le radical $\sqrt{8\nu}$ a sa valeur arithmétique.

L'intégrale correspondante a nécessairement la forme

$$W = \sqrt{8\nu}\,\xi_1(1 + \mathfrak{P}_1),$$

où $\mathfrak{P}_1$ est une série de puissances de ξ_1, η_1, qui s'annule pour $\xi_1 = \eta_1 = 0$.

Comme les coefficients de l'équation (10') sont des fonctions périodiques du paramètre α, il en sera de même des coefficients de W et par suite de W elle-même.

Le champ de convergence de $\mathfrak{P}_1$, autour du couple $\xi_1 = \eta_1 = 0$, peut dépendre en particulier de la constante C et du paramètre α. Mais α ne dérange pas. On est assuré en effet par les remarques, qui précèdent, que, une fois fixée la valeur de C, on peut lui faire correspondre un domaine de l'espace complexe ξ_1, η_1, autour du couple $\xi_1 = \eta_1 = 0$, où la fonction W reste régulière quelle que soit la valeur (réelle) de α.

Abandonnons désormais les variables auxiliaires ξ_1, η_1, en reprenant nos variables ξ, η.

La fonction W, qu'on vient de définir, prend l'aspect

$$W = \sqrt{8\nu}\,(\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha)\{1 + \mathfrak{P}(\xi, \eta, \alpha)\}, \tag{11}$$

où $\mathfrak{P}$ est une fonction périodique de α, qui s'annule pour $\xi = \eta = 0$ et reste régulière dans un certain domaine des ξ, η, qu'on peut supposer indépendant de α (mais non de C).

§ 4. *Sur une équation implicite dépendante de W.*

On tire de (11)

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \sqrt{8\nu}\cos\alpha + \ldots, \qquad \frac{\partial W}{\partial \eta} = \sqrt{8\nu}\sin\alpha + \ldots,$$

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} + i\frac{\partial W}{\partial \eta} = \sqrt{8\nu}\,e^{i\alpha} + \ldots,$$

les termes non écrits contenant ξ ou η en facteur.

Introduisons, pour abréger l'écriture, l'expression (5) de la vitesse relative v, c'est-à-dire, en y remplaçant r par ρ^2,

$$\rho v = \left|\sqrt{2\nu - 2C\rho^2 + \rho^6 + 2\mu\rho^2 V}\right|, \tag{5'}$$

et posons

$$\frac{\dfrac{\partial W}{\partial \xi} + i\dfrac{\partial W}{\partial \eta} - 2i\rho^2(\xi + i\eta)}{2\rho v} = e^{i\alpha}(1 + \mathfrak{Q}).$$

La fonction $\mathfrak{Q}(\xi, \eta, \alpha)$ jouira — on le constate de suite — des mêmes propriétés que $\mathfrak{P}$, sauf bien entendu que ce n'est plus une fonction réelle.

Ceci posé, envisageons l'équation

$$(12) \qquad \frac{\frac{\partial W}{\partial \xi} + i\frac{\partial W}{\partial \eta} - 2i\rho^2(\xi + i\eta)}{2\rho v} = k,$$

en y entendant par k un nombre de module égal à l'unité, et en y considérant: ξ, η comme des paramètres ayant des valeurs données ξ_0, η_0; α comme inconnue.

Le premier membre, c'est-à-dire $e^{i\alpha}(1 + \mathfrak{Q})$, est une fonction périodique de α, régulière pour $|\xi_0|$, $|\eta_0|$ assez petits.

On peut dire également, en remplaçant α par

$$\gamma = e^{i\alpha},$$

que le premier membre de l'équation (12) est une fonction uniforme de γ,

$$\psi(\gamma, \xi_0, \eta_0),$$

holomorphe pour tous les points du cercle $|\gamma| = 1$, tant que $|\xi_0|$, $|\eta_0|$ sont assez petits.

A cause de (10) et de (5'), on a l'identité

$$\frac{\frac{\partial W}{\partial \xi} + i\frac{\partial W}{\partial \eta} - 2i\rho^2(\xi + i\eta)}{2\rho v} = \frac{2\rho v}{\frac{\partial W}{\partial \xi} - i\frac{\partial W}{\partial \eta} + 2i\rho^2(\xi - i\eta)}.$$

L'équation (12) entraîne donc la suivante:

$$(12') \qquad \frac{\frac{\partial W}{\partial \xi} - i\frac{\partial W}{\partial \eta} + 2i\rho^2(\xi - i\eta)}{2\rho v} = \frac{1}{k},$$

ce qu'on peut aussi énoncer en disant que l'équation (12) se transforme en elle même lorsqu'on y change i en $-i$, et k en $\frac{1}{k}$ (sans toucher aux autres quantités).

Mettons en évidence comme inconnue γ, au lieu de α, et appelons $\bar{\psi}$ ce que devient la fonction ψ lorsqu'on change i en $-i$ en laissant toute lettre inaltérée.

Les équations

$$\psi(\gamma, \xi_0, \eta_0) = k, \tag{12 bis}$$

$$\bar{\psi}\left(\frac{1}{\gamma}, \xi_0, \eta_0\right) = \frac{1}{k} \tag{12' bis}$$

ne seront pas distinctes, d'après ce qu'on vient de dire: toute valeur de γ satisfaisant à la première vérifie par là même aussi la seconde.

Attribuons en particulier la valeur zéro aux paramètres ξ_0, η_0. Il reste, au premier membre de (12), $e^{i\alpha}$. L'équation (12 bis) se réduit donc à

$$\gamma = k.$$

Or $\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}$ ne s'annule pas pour $\xi_0 = \eta_0 = 0$ (c'est l'unité).

Il existe partant un domaine autour du point $\xi = \eta = 0$, dans lequel l'équation (12 bis) définit univoquement une racine γ_1. Je dis qu'elle a l'unité pour module.

Je remarque pour cela qu'elle satisfait aussi à l'équation (12' bis), et par suite même à celle qu'on en déduit en remplaçant toute quantité par sa conjuguée.

Comme ξ_0, η_0 et les autres constantes C, μ, ν sont essentiellement réelles, la dite opération consiste dans la substitution de ψ à $\bar{\psi}$, $\frac{1}{\bar{\gamma}_1}$ et $\frac{1}{\bar{k}}$ à $\frac{1}{\gamma_1}$ et $\frac{1}{k}$.

Le module de k étant l'unité, $\frac{1}{\bar{k}} = k$, et l'on aura en définitive, à côté de

$$\psi(\gamma_1, \xi_0, \eta_0) = k,$$

aussi

$$\psi\left(\frac{1}{\bar{\gamma}_1}, \xi_0, \eta_0\right) = k.$$

Il en résulte que $\frac{1}{\bar{\gamma}_1}$ est racine de (12 bis) en même temps que γ_1.

Mais dans un certain domaine des ξ, η il n'y a qu'une seule racine: γ_1 et $\frac{1}{\bar{\gamma}_1}$ sont donc identiques, ce qui démontre bien que la racine de l'équation (12 bis) reste unimodulaire dans ce domaine.

Je le désignerai par D, en faisant ici encore remarquer qu'on peut le considérer comme fixe dès qu'on ne fait pas varier C. Tant que ξ, η appartiennent à ce domaine on peut satisfaire à l'équation (12) par un angle réel $\alpha = \frac{1}{i} \log \gamma_1$, et un seulement, puisqu'on ne doit naturellement considérer comme distincts ceux qui en diffèrent par des multiples entiers de 2π.

§ 5. *Solutions particulières. — Choix des paramètres.*

Revenons aux équations du mouvement en coordonnées cartésiennes x, y.

Une solution particulière quelconque reste déterminée d'une façon unique pourvu qu'on se donne l'état de mouvement (position et vitesse) correspondant à un instant quelconque t_0.[1]

Les quatre éléments déterminatifs des états de mouvement, appartenant à une même solution, sont toutefois liés à tout instant par la relation intégrale $F = -C$, et on pourra, pour fixer une solution particulière, se donner la valeur de la constante C, et trois des quatre quantités définissant la position P_0 et la vitesse à l'instant t_0.

En premier lieu, par exemple, les valeurs ξ_0, η_0 de ξ, η se rapportant à P_0. La connaissance de P_0 et de C définit sans ambiguité la valeur absolue v de la vitesse moyennant (5').

Comme quatrième élément déterminatif il y a lieu de prendre la direction de la vitesse.[2]

φ désignant l'angle, que ladite direction fait avec la direction positive de l'axe des abscisses,

$$k = e^{i\varphi} \frac{\xi_0 - i\eta_0}{\rho_0} \qquad \left(\rho_0 = \left|\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}\right|\right) \tag{13}$$

sera notre quatrième paramètre.

Pour fixer une trajectoire il suffit naturellement de se donner C, ξ_0, η_0, k en se passant de l'instant particulier t_0 auquel correspondent ces quatre valeurs. Mais le phénomène est réversible, ce qui se déduit analytique-

[1] Cela suppose naturellement que tout soit régulier et par suite que la position du mobile dans l'état envisagé ne soit ni S ni J.

[2] Je n'aurai pas à considérer le cas $v = 0$, et je puis partant parler de direction.

ment de la circonstance que les équations (1) ne changent pas lorsqu'on y change t en $-t$ en renversant en même temps les signes de x', y'.

Renverser le sens de la vitesse équivaut à changer φ dans $\varphi + \pi$ et par conséquent (la position restant la même) k dans $-k$.

Il s'en suit qu'aux deux états de mouvement

$$C, \xi_0, \eta_0, k;$$

$$C, \xi_0, \eta_0, -k$$

correspondent les deux sens opposés d'une même trajectoire.

Il convient encore d'indiquer quelle est l'expression de k en fonction des variables conjuguées ξ, η, ϖ, χ (je supprime l'indice o pour abréger l'écriture).

Partons pour cela de l'identité

$$x' + iy' = ve^{i\varphi}.$$

On en tire

$$k = \frac{x' + iy'}{v} \frac{\xi - i\eta}{\rho}.$$

Transformons le second membre en profitant des (2), (6), (7), et il viendra

$$k = \frac{\varpi + i\chi - 2i\rho^2(\xi + i\eta)}{2\rho v}. \tag{14}$$

§ 6. *Intégrales canoniques. — Leur validité effective au voisinage de S.*

Soit β une constante et envisageons les équations classiques de la méthode d'intégration de JACOBI

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \beta, \tag{II}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \varpi, \qquad \frac{\partial W}{\partial \eta} = \chi, \tag{III}$$

W étant l'intégrale complète, définie au § 3.

Supposons qu'elles soient satisfaites par des valeurs particulières ξ_0, η_0, ϖ_0, χ_0 de ξ, η, ϖ, χ.

Il est bien connu que les intégrales ξ, η, ϖ, χ de (I′), définies par les valeurs initiales $\xi_0, \eta_0, \varpi_0, \chi_0$ continuent à vérifier ces équations tant que le mouvement reste régulier.

Ceci rappelé, désignons par A un arc quelconque de trajectoire tout intérieur au domaine D.

On a le théorème suivant:

Quel que soit A, on peut toujours fixer les constantes α et β de façon que les équations (II), (III) soient remplies en tout point de A.

D'après ce qui précède, il nous suffit de le constater pour un point seulement, soit $P_0(\xi_0, \eta_0)$, qu'on supposera, bien entendu, distinct de S.

La vitesse est sans doute > 0,[1] et on peut compléter la définition de la trajectoire en associant à C, ξ_0, η_0 le quatrième paramètre k du paragraphe précédent.

Les valeurs de ϖ, χ, qui correspondent à la quaterne C, ξ_0, η_0, k sont les solutions des deux équations $F = -C$ et (14), v étant défini par (5′) en fonction de C, ξ_0, η_0.

La première équation $F = -C$ peut s'écrire, à cause de (4′) et de (5′),

$$\frac{1}{4}\{(\varpi + 2\rho^2\eta)^2 + (\chi - 2\rho^2\xi)^2\} = \rho^2 v^2,$$

qui, combinée avec (14), donne lieu au système linéaire:

$$\frac{\varpi + i\chi - 2i\rho^2(\xi + i\eta)}{2\rho v} = k, \tag{14}$$

$$\frac{\varpi - i\chi + 2i\rho^2(\xi - i\eta)}{2\rho v} = \frac{1}{k}. \tag{15}$$

Considérons d'autre part la fonction W et supposons d'attribuer à α la valeur α_1, racine de l'équation (12), où l'on suppose bien entendu que C, ξ_0, η_0, k soient ceux qui appartiennent au point envisagé de notre A.

Les dérivées $\frac{\partial W}{\partial \xi}, \frac{\partial W}{\partial \eta}$ vérifient de la sorte (pour $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$) l'équation (12) et par là même (comme on l'a remarqué au § 4) aussi l'équa-

[1] En effet, parmi les conditions, qui doivent être satisfaites dans le domaine D, il y a la suivante: ρv c'est-à-dire $\left|\sqrt{2\nu - 2C\rho^2 + \rho^6 + 2\mu\rho^2 V}\right|$ reste uniforme. v ne peut donc pas s'annuler à l'intérieur de D.

tion ($12'$). La comparaison de ces deux équations (12), ($12'$) avec le système (14), (15) donne immédiatement (pour l'état de mouvement C, ξ_0, η_0, k)

$$\frac{\partial W}{\partial \xi} = \varpi, \qquad \frac{\partial W}{\partial \eta} = \chi.$$

Les équations (III) sont donc remplies au point P_0 de A, dès qu'on donne à α la valeur α_1. Il en est de même de (II), pourvu qu'on prend β égal à la valeur du premier membre. C. Q. F. D.

Remarque. Rien n'empêche de suivre une trajectoire aussi hors de D, tant que le mouvement reste régulier. On peut encore affirmer que les équations (II), (III) resteront vérifiées, en entendant par W la continuation analytique, obtenue en suivant la trajectoire, de la détermination valable dans D (et uniforme dans ce domaine). Mais cela ne nous aide pas grande chose, puisqu'il nous est inconnu comment se comporte W hors de D.

En particulier si une trajectoire rentre dans D après en être sortie, la continuation de W, correspondante à la rentrée, soit W_1, tout en étant toujours une intégrale de (9), peut fort bien différer de la détermination $\sqrt{8\nu}\,(\xi\cos\alpha + \eta\sin\alpha) + \ldots$: celle-ci était en effet caractérisée par une condition initiale, qui n'est pas invariante vis-à-vis d'une continuation analytique.

On peut ajouter que cette circonstance gênante de la non-uniformité de W n'est pas seulement à craindre, mais se présente en réalité. Voici un exemple bien simple.

Supposons que la masse μ du centre J soit nulle. P n'est alors soumis qu'à l'attraction de S, et l'on est reconduit au problème élémentaire du mouvement d'un point P, attiré suivant la loi de Newton par un centre S, qu'on peut considérer fixe.

Par rapport à des axes fixes le mouvement de P est képlérien et admet les deux intégrales des forces vives et des aires. Celle de Jacobi n'en est qu'une combinaison linéaire, et, h, c, C désignant respectivement les constantes des forces vives, des aires et de Jacobi, on trouve

$$C = -h + c.$$

Si h est négative, la trajectoire (absolue) de P est une ellipse; son axe a et son paramètre p sont exprimés par les formules

$$a = -\frac{1}{h}, \qquad p = c^2.$$

Par rapport aux axes mobiles x, y, qui tournent uniformément, tout se passe comme si (les axes étant fixes) l'ellipse tournait autour du foyer S, dans le sens opposé, pendant que P la parcourt d'un mouvement képlérien.

Laissons de côté les valeurs particulières de h, pour qui le moyen mouvement serait commensurable avec la vitesse de la rotation (fictive) de l'ellipse, c'est-à-dire rationnel, puisque cette vitesse a la valeur -1.

Un petit raisonnement, bien souvent employé dans des cas analogues, permet alors de conclure que la trajectoire relative de P remplit entièrement[1] la couronne circulaire définie par les distances aphélie et périhélie de l'orbite absolue.

Il suffit donc que le domaine D (correspondant à une valeur donnée quelconque de la constante C) renferme à son intérieur quelque point d'une de ces trajectoires (provenant des orbites elliptiques) pour qu'il doive nécessairement contenir une infinité d'arcs A appartenant tous à cette même trajectoire.

Pour constater qu'il en bien ainsi, donnons à C une valeur positive, d'ailleurs quelconque, et rappelons l'identité $C = -h + c$.

On y satisfait en prenant par exemple c très petit, et par conséquent $-h$ très voisin à C, avec la précaution que $(-h)^{\frac{3}{2}}$ ne soit pas rationnel.

L'orbite absolue est alors une ellipse de moyen mouvement $(-h)^{\frac{3}{2}}$ irrationnel et de paramètre $p = c^2$ très petit.

Rien n'empêche évidemment de supposer c assez petit pour que la région périhélie tombe bien à l'intérieur de D.

§ 7. *Conséquences de la représentation holomorphe des trajectoires à l'intérieur de D. — Conditions de choc et de sûreté mécanique. — Portée relative de ces conditions.*

Théorème: Si un arc A se rapproche indéfiniment de S, il y passe. D'après le paragraphe précédent l'équation (II) sera vérifiée en tout point

[1] Plus précisément la courbe est condensée dans la couronne, c'est-à-dire qu'il y a des points de la courbe si près que l'on veut de tout point fixé d'avance à l'intérieur (ou sur le contour) de la couronne.

de A pour des valeurs convenables des constantes α et β. Par hypothèse l'arc possède des points si près de S que l'on veut. Dans ces points la fonction

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \sqrt{8\nu}\,(-\xi \sin\alpha + \eta\cos\alpha) + \dots$$

prend des valeurs, qu'on peut rendre plus petites que toute quantité assignée d'avance. Mais $\frac{\partial W}{\partial \alpha}$ a, tout le long de A, la valeur constante β. On doit en conclure $\beta = 0$, ce qui démontre bien que A passe par S.

Si, pour un A quelconque, $\beta \gtrless 0$, la courbe ne peut pas se rapprocher indéfiniment de S. C'est une conséquence évidente du résultat obtenu tout à l'heure. Mais il y a plus.

Le minimum δ des distances des points de A à S est une fonction de C, α, β, périodique par rapport à α et s'annulant avec β. On en conclu, d'après le paragraphe précédent, que ce δ est une fonction uniforme des circonstances initiales. Soient en effet C, ξ_0, η_0, k les quatre paramètres définissant l'état initial C_0 (le point ξ_0, η_0 étant toujours supposé à l'intérieur de D).

Considérons d'autre part la fonction $\delta(C, \alpha, \beta)$. On doit y remplacer α par la racine α_1 de l'équation (12) et β par sa valeur

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \alpha}\right)_{\xi=\xi_0, \eta=\eta_0, \alpha=\alpha_1}.$$

δ devient ainsi une fonction uniforme de C, ξ_0, η_0, k; mais on peut encore substituer à C et à k leurs valeurs F et (14), et on aura de la sorte une fonction uniforme des paramètres canoniques $\xi_0, \eta_0, \varpi_0, \chi_0$ de l'état E_0.

Occupons-nous maintenant des courbes

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0,$$

qui passent simplement par le point S.

Aux conditions, imposées à D au § 4, imaginons ajoutée, comme il est évidemment permis, encore la suivante:

D doit être assez petit pour que la courbe

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0$$

n'ait à l'intérieur de D que l'unique branche régulière passant par S; et cela quelle que soit la valeur (réelle) de α.

On est alors assuré que la longueur de l'arc de la dite courbe, compris entre P_0 et S, est finie.

D'ailleurs, dans le domaine D, ρv est toujours > 0 et diffère autant moins de $|\sqrt{2\nu}|$ qu'il s'agit de points plus près de S.

Le mouvement ne peut donc pas changer de sens sur l'arc $\widehat{P_0 S}$; de plus la vitesse croît indéfiniment lorsqu'on s'approche de S. Le temps nécessaire au mobile pour parcourir cet arc $\widehat{P_0 S}$ reste partant fini et tend même vers zéro plus rapidement que l'arc lui même.

On pourrait préciser cette remarque en ayant recours à la dernière intégrale canonique

$$\frac{\partial W}{\partial C} = t + \text{const.};$$

mais nous n'avons pas à discuter les lois du mouvement.

Il nous suffit de rappeler que sur toute trajectoire le mouvement est possible dans les deux sens, pour pouvoir conclure de ce qui précède:

Chacun des arcs $\frac{\partial W}{\partial \alpha} = 0$ est à la fois trajectoire de collision et trajectoire d'éjection; $\beta = 0$ (ou, si l'on veut, $\delta = 0$) est donc la condition caractéristique d'un choc P, S.

Ainsi qu'il a été remarqué plus généralement à propos de la fonction $\delta(C, \alpha, \beta)$, on peut exprimer β en fonction uniforme des circonstances initiales, c'est-à-dire de C, ξ_0, η_0, k, ou bien encore de la quaterne canonique $\xi_0, \eta_0, \varpi_0, \chi_0$. Il serait aisé de calculer autant de termes que l'on veut du développement (convergent à l'intérieur de D) de $\beta(C, \xi_0, \eta_0, k)$ en série de puissances de ξ_0, η_0.

J'omets le calcul en renvoyant à mon mémoire »Traiettorie singolari etc.» cité dans l'introduction, où j'ai explicité la condition du choc sous une forme un peu différente.

Les données étant encore C, ξ_0, η_0, k, on peut se proposer de reconnaître si le choc, caractérisé par la condition $\beta = 0$, est passé ou futur.

Voyons pour cela ce qui se passe au voisinage immédiat du point S. Toute A est une courbe régulière ayant en S une tangente bien déterminée. Si l'on a affaire à un choc passé, le rayon vecteur SP a du être dirigé,

à l'instant de l'éjection, précisément comme la tangente à A dans le sens du mouvement. On a donc alors à la limite $\varphi = \vartheta$, en désignant par ϑ l'anomalie du rayon vecteur, et, comme au § 5, par φ l'inclinaison de la vitesse sur la direction positive de l'axe des abscisses.

Si l'on a affaire a un choc futur, la relation limite sera au contraire $\varphi = \vartheta + \pi$.

Ceci posé, comme les états, qu'on considère, correspondent à des positions très voisines de S, il est bien évident que, la relation $\beta = 0$ étant satisfaite, φ doit différer très peu: ou bien de ϑ, ou bien de $\vartheta + \pi$. Dans le premier cas il s'agit d'une éjection, dans le second d'une collision.

Au point de vue physique l'absence de choc ne suffit pas à garantir la régularité du mouvement: pour qu'il soit légitime de le retenir conforme aux prévisions du calcul, il faut que les corps ne se rapprochent pas au délà d'un certain ε.

Lorsque le mobile est à l'intérieur de D on peut encore décider, par la connaissance de l'état de mouvement à un instant quelconque, s'il en sera ainsi ($\delta > \varepsilon$). Toutefois ni cette condition de sûreté, ni l'autre moins restrictive, qui exclut simplement le choc, embrassent toute la durée du mouvement.

Elles sont bien valables tant que le mobile reste en D; mais si le mobile y rentre après en être sorti, elles ne permettent a priori aucune prévision. Cela tient à ce que l'on rentre dans D avec une détermination inconnue W_1 de W, pouvant donner lieu à un nouveau arc $\frac{\partial W_1}{\partial \alpha} = \beta$.

Quoi qu'il en soit, il reste toujours un résultat positif se rapportant à la région D: Si $\delta > \varepsilon$, il n'y a rien à craindre pour le moment du voisinage de S. Seuls des rapprochements nouveaux (c'est-à-dire précédés par des sorties de D) pourraient devenir dangereux.

§ 8. *Remarque.*

Tout arc de trajectoire intérieur à D satisfait effectivement aux équations

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \beta$$

et (III).

Comme il a déjà été substantiellement remarqué, en éliminant α et C de $\frac{\partial W}{\partial \alpha}$ on obtient une fonction uniforme f de ξ, η, ϖ, χ.

On a donc pour tout arc A

$$f(\xi, \eta, \varpi, \chi) = \beta.$$

La fonction f est distincte de F, puisque, en se rapportant par exemple aux variables C, ξ, η, k, on a $F = -C$, tandis que

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{8\nu}(-\xi \sin\alpha + \eta\cos\alpha) + \ldots \\ &= \sqrt{8\nu}\left(-\xi\frac{k-\frac{1}{k}}{2i} + \eta\frac{k+\frac{1}{k}}{2}\right) + \ldots \end{aligned}$$

n'est pas une fonction de la seule C.

Voilà une intégrale autre que $F = \text{const.}$ uniforme pour quelque système de valeurs de ξ, η, ϖ, χ et par suite aussi des variables cartésiennes x, y, x', y', qui en sont des fonctions algébriques.

A première vue la conclusion est choquante, puisqu'elle paraît en contradiction avec le théorème bien connu de M. Poincaré, qui exclut l'existence d'intégrales uniformes en déhors de $F = \text{const.}$

Il n'en est rien toutefois, et on peut s'en convaincre aisément en ayant égard aux limites de validité des deux résultats.

Celui de M. Poincaré établit la non-existence d'intégrales uniformes par rapport aux variables képlériennes, ce qui implique l'uniformité au voisinage de *tous* les états de mouvements x, y, x', y', qui appartiennent à une même orbite osculatrice (elliptique).

On ne peut pas exclure, d'après cette proposition, l'existence d'intégrales uniformes, pour quelque portion de l'orbite seulement, ni non plus au voisinage des états de mouvement, qui ne seraient elliptiques du tout.

Notre intégrale $f = \beta$, qui est uniforme dans le domaine D, se trouve précisément dans l'une ou dans l'autre de ces conditions.

Padoue, septembre 1904.

SUR LES FONDEMENTS DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES ET LE PROBLÈME DU CONTINU

PAR

I. KÖNIG

À BUDAPEST.

Après de longues hésitations, je me décide à publier cet article. Quel que soit l'accueil réservés aux vues que j'y expose, je crois que les questions qu'il soulève sont de celles que la théorie des ensembles ne saurait éluder dans ses développements ultérieurs.

Que le mot »ensemble» ait été employé indistinctement pour désigner des concepts très différents et que ce soit là origine des paradoxes apparents de la théorie des ensembles; que d'autre part cette théorie, comme toute science exacte, ne puisse se passer d'axiomes, et que le choix des axiomes, plus profond ici qu'ailleurs, soit dans une certaine mesure arbitraire (comme il arrive pour toutes les sciences): tout cela est bien connu. Néanmoins je pense présenter sur ces questions quelques points de vue nouveaux. En particulier, je crois que la théorie *spéciale* des ensembles bien ordonnées ne saurait être regardée comme entièrement fondée tant que l'on n'aura pas éclairci les questions soulevées au § 4.

1. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$, une série infinie dénombrable (de type ω) d'entiers positifs, et soit la suite

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$$

un élément de l'ensemble appelé »continu». Si l'on est préalablement parti d'une autre définition du continu, alors les $(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$ sont des symboles qui, d'une part, déterminent univoquement chacun des éléments du continu, et d'autre part distinguent ces éléments les uns des autres.

Nous dirons qu'un élément du continu a une »définition finie» si (nous servant pour fixer notre pensée scientifique d'une langue appropriée) nous pouvons en un temps fini définir une opération (loi de formation) conduisant à distinguer spécifiquement l'élément donné d'un autre élément quelconque, c'est à dire démontrant pour un entier quelconque k l'existence d'un et d'un seul élément a_k.

Il faut observer que la distinction spécifique dont il est ici question n'implique pas que la *détermination* de a_k puisse être faite au moyen d'une opération bien définie ou même finie.

On montre facilement que les éléments du continu dont la définition est finie forment un ensemble partiel de puissance $\aleph_0$. Nous désignerons cet ensemble par E.

Une définition finie doit s'exprimer tout entière au moyen d'un nombre fini de mots et de signes de ponctuation. L'ensemble des définitions finies peut être ordonné de telle sorte qu'à l'une quelconque de ces définitions corresponde un et un seul entier positif comme nombre ordinal fini.

A tout élément du continu ayant une définition finie correspond une suite d'entiers positifs (puisqu'un tel élément peut admettre et admet en effet une pluralité de définitions finies). Dans cette suite il y a un entier qui est plus petit que tous les autres. Cet entier déterminera donc d'une manière univoque l'élément correspondant (à définition finie) du continu.

Ainsi l'ensemble E est équivalent à un ensemble partiel pris dans l'ensemble des entiers positifs. D'ailleurs si l'on se donne une suite

$$(a\,,\ a\,,\ \ldots\,,\ a\,,\ \ldots),$$

où a prend des valeurs entières positives quelconques, cette suite constitue un élément du continu à définition finie. On déduit de ces remarques que

$$e = \aleph_0,$$

en désignant par e la puissance de l'ensemble E.

Mais comme le continu, par définition, n'est pas dénombrable, il y a nécessairement des éléments du continu dont la définition n'est pas finie.

2. Quoique cette exposition ne puisse encore prétendre à une rigueur parfaite, il faut néanmoins préciser les axiomes qui sont intervenus jusqu'ici dans mon raisonnement.

a) En premier lieu nous admettons comme un fait que notre conscience est le théâtre de processus qui obéissent aux lois formelles de la logique et constituent la »pensée scientifique». Nous admettons aussi que parmi ces processus il s'en trouve qui correspondent univoquement aux processus par lesquels nous formons les suites de symboles définies plus haut.

»Comment» se produit cette correspondance et »jusqu'où» elle va, ce sont là des questions que nous ne soulevions pas. (*Axiome métalogique.*)

b) Le concept de »suite arbitraire (de type ω) de nombres entiers positifs», et le concept de »l'ensemble de toutes ces suites», que nous appelons »continu», sont des »concepts possibles», c'est-à-dire des concepts qui ne renferment aucune contradiction logique. (*Axiome du continu.*)

Une analyse plus approfondie de ces axiomes se trouve, je crois, dans le memoire qu'a présenté M. HILBERT au III[e] Congrès international des Mathématiciens (C. R. du Congrès, p. 174).

La définition du continu sur laquelle je m'appuie implique, en particulier, que la puissance du continu est $\aleph_0^{\aleph_0}$.

On a en outre $\aleph_0^{\aleph_0} > \aleph_0$. Pour le prouver on peut se référer à ma note *Zum Kontinuum Problem*, publiée dans les Math. Annalen, t. 60, p. 177.

En admettant ces données, je me mets sciemment en opposition avec la doctrine d'après laquelle il serait interdit aux analystes de s'aventurer hors du domaine des »lois finies». Une telle doctrine entraîne selon moi la négation de l'existence du continu et du problème du continu. Mon point de vue consiste au contraire à admettre qu'il y a des éléments du continu que nous ne pouvons pas penser »jusqu'au bout», et qui, malgré cela, sont exempts de contradiction. Ce sont, si l'on me passe cette nouvelle acception du mot, des éléments »idéaux».

c) Les axiomes précédents nous donnant le droit de parler d'un élément »quelconque» du continu, nous invoquons en dernier lieu l'*Antithèse logique:* »Ou un élément quelconque du continu a une définition finie, ou ce n'est pas le cas.» Les axiomes a) et b) une fois admis, l'axiome c) ne saurait pas ne pas l'être. On peut d'ailleurs, sans rien changer à nos déductions, lui donner une forme subjective: »Pour un élément quelconque du continu, on peut sûrement trouver une définition finie, ou ce n'est pas le cas».

3. Les données admises ci-dessus vont me permettre de prouver, d'une manière extraordinairement simple, que *le continu ne peut pas être bien ordonné.*

Supposons que les éléments du continu forment un ensemble bien ordonné, et considérons parmi ces éléments ceux qui n'ont pas une définition finie. Ces derniers constituent un ensemble partiel de l'ensemble bien ordonné, et cet ensemble partiel, étant lui-même bien ordonné, a un et un seul premier élément.

Or, d'après les données admises plus haut, le continu, comme tout ensemble bien ordonné, définit une suite bien enchaînée (sans lacune, »lückenlos«) de nombres ordinaux déterminés, en sorte qu'à chaque élément du continu correspond un et un seul nombre ordinal et inversement. Dès lors »le nombre ordinal correspondant à un élément à définition finie du continu«, de même que »l'élément du continu correspondant à un nombre ordinal à définition finie de la suite considérée«, a lui-même une définition finie. Notre raisonnement nous forcerait dès lors à conclure que dans une suite de nombres ordinaux il y a un nombre qui est le premier de la suite et qui n'a pas de définition finie. Cela est manifestement impossible.

On a en effet un ensemble déterminé, bien ordonné, de nombres ordinaux à définition finie qui forment une suite bien enchaînée (lückenlos). »Le nombre ordinal qui, d'après son ordre de grandeur, se range immédiatement après la suite en question« est bien un nombre à définition finie, et cependant notre hypothèse initiale conduit à conclure qu'il n'a pas de définition finie.

Ainsi l'hypothèse d'après laquelle le continu pourrait être bien ordonné conduit, comme je l'avais annoncé, à une contradiction.

4. On suspectera sans doute la valeur du raisonnement précédent en faisant observer qu'il s'applique mot pour mot à *tout* ensemble bien ordonné non dénombrable. Il équivaudrait donc à prouver qu'il n'existe pas de tels ensembles. Or on connait un ensemble bien ordonné non dénombrable défini sans contradiction: c'est la classe de nombres $Z(\aleph_0)$ de M. Cantor, ou »l'ensemble de tous les types ordinaux des ensembles bien ordonnés de puissance $\aleph_0$«. On voudra arguer de ce paradoxe qu'une faute

a été commise dans le raisonnement que j'ai exposé. Il ne *faut* pas, qu'il en soit ainsi, comme je vais le montrer en entrant dans quelques détails.

L'acception du mot »ensemble» diffère totalement dans les deux cas.

Lorsque nous construisons le concept du continu, notre point de départ, notre base est la suite »arbitraire» $(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$. En tant que nous remplaçons $a_1, a_2, \ldots$ par des entiers positifs déterminés, nous faisons de cette suite une suite »déterminée», un élément du continu qui, s'il est défini, est dans notre entendement distingué de tous les autres éléments. En tant que nous nous représentons ensuite *l'ensemble* de tous ces éléments »bien distincts», nous sommes conduits au continu.

Il en est tout autrement de la classe de nombres $Z(\aleph_0)$. Les »éléments» de cette classe sont définis par la »propriété» qu'ils ont d'être les types ordinaux d'ensembles bien ordonnés de puissance $\aleph_0$. Nous connaissons à vrai dire de tels éléments, par exemple: $\omega, \omega + 1, \ldots$. Mais la propriété qui les définit n'est qu'une abstraction; à mettre les choses au mieux, elle fournit un moyen de distinguer entre les objets qui appartiennent à la classe considérée et les autres objets; mais elle ne donne aucune indication sur la manière dont on pourra effectivement former *chacun* des éléments de $Z(\aleph_0)$. C'est ici un »concept collectif» qui est notre base, et c'est en partant de ce concept que nous construisons *après coup* des éléments. C'est pourquoi je voudrais qu'avec M. CANTOR on appelât $Z(\aleph_0)$ une »classe» en non un »ensemble».

Mais que la seconde classe de nombres $Z(\aleph_0)$ puisse être définie comme ensemble explicite formé d'éléments bien distingués (distincts par leur nature), cela ne saurait actuellement être regardé comme vraisemblable. Et précisément, si l'on accepte la démonstration que j'ai donnée plus haut, on en déduira que la seconde classe de nombres ne saurait être conçue comme étant un ensemble donné explicitement, c'est-à-dire comme ensemble d'éléments parfaitement distingués et séparés les uns des autres.[1]

---

[1] Là se trouve, je crois, l'origine des paradoxes de la théorie des nombres ordinaux, que M. BURALI-FORTI a signalés le premier.

J'ajouterai encore quelques remarques qui facilitent peut-être la compréhension du § 4.

L'ensemble des nombres entiers positifs n'est lui aussi originairement donné que comme »classe». C'est également ainsi que M. HILBERT définit (l. c.) le »plus petit

En terminant cet exposé fragmentaire, je me plais à reconnaître que, bien qu'opposés à certaines vues de M. CANTOR, mes résultats, s'ils sont exacts, ne mettent que mieux en lumière la haute valeur des créations géniales de l'illustre analyste. Ce ne sont d'ailleurs que certaines présomptions de M. CANTOR qui seraient infirmées par ce travail: le contenu des propositions *démontrées* par lui subsiste intact.

Je remarque enfin que la distinction établie ici entre les »ensembles» et les »classes» éclaircit entièrement les paradoxes bien connus de la théorie des ensembles (ensemble de tous les ensembles etc.).

Les principaux résultats exposés ci-dessus ont été présentés à l'Académie Hongroise des Sciences le 20 juin 1905.

---

infini». Mais il semble qu'ici le postulat qui consiste à assimiler la classe à un ensemble explicitement donné soit possible, c'est-à-dire exempt de contradiction.

Au contraire, d'après ce qui précède, on devrait regarder le continu comme étant exclusivement un »ensemble explicitement donné», et la seconde classe de nombres comme étant exclusivement une classe ou (si l'on me permet l'expression) un »ensemble en puissance», (werdende Menge).

Je veux encore signaler un concept collectif très élémentaire que sûrement on n'a pas le droit de considérer comme ensemble explicitement donné.

Partons de l'ensemble de tous les nombres décimaux finis, mais regardons ces nombres comme ayant une infinité de décimales, cela en ajoutant à leur droite une infinité de zéros.

Imaginons que dans les nombres ainsi écrits nous échangions deux chiffres quelconques. Toutes les places sont disponibles, c'est-à-dire que si nous remplaçons un chiffre quelconque par un autre chiffre quelconque, nous obtenons un nombre qui appartient encore à la classe considérée.

Et cependant il n'est aucunement permis de parler de l'ensemble de tous les places, comme places disposibles; car alors on omettrait manifestement de faire intervenir le principe restrictif auquel satisfait la loi de formation de nos nombres. Ce principe est le suivant: »La place de rang k est disponible; mais il existe nécessairement un entier positif $l > k$, tel qu'à partir de la place de rang l toutes les places soient occupées par le chiffre 0.»

Pour répondre à la question: »Combien y a-t-il de places disponibles simultanément?» les nombres cardinaux (au sens de M. CANTOR) sont inadéquats: il faut créer un nouveau concept.

SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES ET SÉRIES DE TAYLOR

PAR

P. FATOU

À PARIS.

Introduction.

Le présent travail a pour objet l'étude de certaines questions d'ordre général concernant les séries trigonométriques et les séries de TAYLOR; il a été entrepris, en grande partie, dans le but de montrer le parti que l'on peut tirer dans ces questions des notions nouvelles de mesure des ensembles et d'intégrale définie généralisée.

Le problème de la mesure des ensembles a été abordé pour la première fois par M. G. CANTOR; ses définitions ont été précisées et complétées par M. JORDAN dans son cours d'analyse; mais c'est M. E. BOREL [1] qui a donné pour la première fois à cette notion de mesure une portée assez générale pour la rendre vraiment utile au point de vue des applications. M. BOREL a posé le problème sous une forme qui équivaut à celle-ci: [2]

Attacher à tout ensemble borné ponctuel (supposé à une dimension) un nombre positif ou nul qu'on appellera sa mesure et qui satisfasse aux conditions suivantes:

---

[1] E. BOREL. *Leçons sur la théorie des fonctions* (Paris, Gauthier-Villars, 1898).

[2] LEBESGUE. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (Paris, Gauthier-Villars, 1904).

1°) Deux ensembles égaux ont même mesure.

2°) L'ensemble somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles, sans point commun deux à deux, a pour mesure la somme des mesures des ensembles composants.

3°) La mesure de l'ensemble de tous les points du segment (0, 1) est 1. Le problème ainsi posé est susceptible d'une solution unique, sinon pour tous les ensembles que l'on peut concevoir comme existant, du moins pour tous ceux que l'on a pu effectivement nommer. La mesure, au sens de M. Borel, est d'ailleurs la même que la mesure au sens de M. Cantor, dans le cas d'un ensemble fermé; mais si l'on considère un ensemble dénombrable et dense, par exemple l'ensemble des points à abscisse rationnelle compris entre zéro et 1, la définition de M. Borel conduira à lui attribuer comme mesure, le nombre zéro, tandis que d'après M. Cantor sa mesure serait 1.

Dans sa thèse (intégrale, longueur, aire), parue dans les Annali di Matematica (1902), M. H. Lebesgue a repris et complété le problème de la mesure d'après M. Borel et en a fait une application des plus importantes à la définition de l'intégrale; la notion d'intégrale, d'après M. Lebesgue, s'applique à toutes les fonctions discontinues que l'on peut nommer (par exemple à toutes les fonctions représentables analytiquement), au moins quand ces fonctions sont bornées; elle coïncide d'ailleurs avec l'intégrale au sens de Riemann, quand celle-ci est applicable, et jouit de toutes les propriétés essentielles de l'intégrale de Riemann.

Il semble que l'introduction de ces notions de mesure et d'intégrale généralisée, qui constitue un progrès important dans l'étude des ensembles ponctuels et des fonctions de variables réelles, peut également servir à résoudre des problèmes qui se posent dans des branches anciennement cultivées de l'analyse.

Déjà M. Lebesgue, dans un mémoire paru dans les Annales de l'École normale supérieure, avait appliqué sa notion d'intégrale à l'étude des séries trigonométriques, et démontré entre autres choses, que si une série trigonométrique est convergente et représente une fonction bornée les coefficients de cette série sont donnés par les formules d'Euler-Fourier où les intégrales sont prises au sens généralisé du mot. Or il existe effectivement des fonctions bornées, non intégrables au sens de Riemann, qui sont représentables par une série trigonométrique convergente en tout point:

ce résultat permet donc de mettre plus d'unité et de généralité dans la théorie de la série de FOURIER.

Dans ce travail je démontre un résultat analogue relatif à l'intégrale de POISSON: si une fonction harmonique régulière à l'intérieur d'un cercle y reste bornée, elle peut s'exprimer à l'aide d'une intégrale de POISSON, l'intégrale étant prise au sens de M. LEBESGUE.

J'ai déduit de là une propriété générale concernant la façon dont se comporte une branche de fonction analytique uniforme au voisinage d'une coupure isolée; *si la fonction est bornée au voisinage de cette coupure (ou devient bornée par une transformation homographique), en tous les points de la coupure, sauf peut-être aux points d'un ensemble de mesure nulle, la fonction prend une valeur déterminée, quand on s'approche de l'un de ces points suivant un chemin non tangent à la coupure.* Il y a donc dans tout intervalle, des points en infinité non dénombrable, sur la coupure, pour lesquels la fonction prend une valeur déterminée, en excluant, au besoin, les chemins tangents à celle-ci. Or on sait que, dans d'autres cas, des circonstances tout autres peuvent se présenter: la fonction modulaire, par exemple, est indéterminée en tous les points d'abscisse irrationnelle de l'axe des quantités réelles, même lorsqu'on s'approche de ces points normalement à la coupure; la propriété énoncée n'est donc pas une banalité.

C'est encore l'étude de l'intégrale de POISSON généralisée, qui m'a permis de démontrer l'existence de *fonctions analytiques uniformes possédant, sur une coupure, une infinité non dénombrable de zéros qui peut être dense dans tout intervalle.*

Les mêmes méthodes m'ont permis, dans un cas il est vrai très particulier, d'aborder l'étude des séries trigonométriques données par la loi de leurs coefficients. On peut chercher, dans ce cas, des critères de convergence, ou supposant que la convergence ait lieu, chercher des propriétés des fonctions ainsi définies; ces problèmes qui paraissent difficiles, ont été peu étudiés. Le principal résultat que j'aie obtenue dans cet ordre d'idées est le suivant: *Si na_n et nb_n tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$, l'ensemble des points de divergence de la série $\Sigma(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ est de mesure nulle.* Il en résulte que si l'on a plusieurs séries de cette espèce, en nombre fini ou en infinité dénombrable, il y a dans tout intervalle, des points où elles convergent toutes simultanément.

Si, renonçant à la convergence au sens ordinaire du mot, on cherche dans quel cas une série est sommable par les procédés de la moyenne arithmétique, comme l'a fait M. Féjer,[1] on peut énoncer des conditions de sommabilité plus générales: Si par exemple on a

$$|a_n| < \frac{C}{n^{\frac{1}{2}+a}}, \qquad |b_n| < \frac{C}{n^{\frac{1}{2}+a}} \qquad (a > 0)$$

on trouve que la série est au plus »doublement indéterminée», sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle, et représente une fonction absolument intégrable dans l'ensemble des points où elle est définie.

J'espère aussi avoir montré que l'intérêt qui s'attache aux travaux de Riemann sur les conditions de représentation d'une fonction par une série trigonométrique, est loin d'être épuisé; j'ai pu facilement, déduire de l'un des théorèmes généraux de Riemann, ce fait qu'une série de Taylor dont les coefficients tendent vers zéro et dont le rayon de convergence est égal à un, est convergente en tout point régulier de son cercle de convergence, ce qui n'avait été démontré que dans des cas particuliers.

J'ai divisé ce travail en deux parties, dans la première j'étudie l'intégrale de Poisson lorsque la fonction donnée sur le contour est discontinue; dans la deuxième partie j'applique les résultats de cette étude à quelques questions concernant les séries trigonométriques et la façon dont se comportent les séries de Taylor sur leur cercle de convergence et je fais connaître quelques propriétés des séries entières à coefficients entiers.

Enfin dans une note additionnelle je donne une démonstration simplifiée du théorème de Cantor sur l'impossibilité de la convergence en tout point d'une série trigonométrique dont les coefficients ne tendent pas vers zéro et quelques remarques générales sur la convergence de ces séries.

Qu'il me soit permis de remercier ici les personnes qui ont bien voulu m'encourager à entreprendre ce travail: MM. Painlevé et Borel et tout particulièrement mon ami H. Lebesgue qui n'a cessé de s'intéresser à mes recherches et dont les conseils m'ont été fort utiles.

[1] L. Féjer (*Sur les fonctions bornées et intégrables*, Comptes Rendus, 10 décembre 1900) et Mathematische Annalen (tome 57, 1904).

L'intégrale de Poisson.

1. On sait que la solution du problème de DIRICHLET dans le cas du cercle est donnée par l'intégrale

$$(1) \qquad F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - u) + r^2} f(u)\,du$$

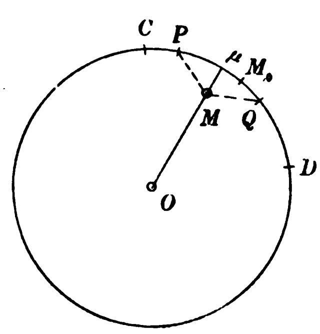
qui définit une fonction harmonique régulière à l'intérieur du cercle de rayon 1, et prenant sur la circonférence, en un point d'argument u_0 la valeur $f(u_0)$.[1] Ce dernier fait n'est d'ailleurs exact, en général, que moyennant la continuité de la fonction périodique $f(u)$, mais il importe de remarquer que, sous la seule condition que $f(u)$ soit une fonction *sommable* en valeur absolue, au sens que M. LEBESGUE attribue à ce mot, l'intégrale précédente conserve un sens et définit toujours une fonction harmonique; mais alors, lorsque le point (r, θ) se rapproche d'un point $(1, u_0)$ de la circonférence, la fonction F ne tend pas nécessairement vers une valeur déterminée. C'est l'étude des différentes particularités qui peuvent se présenter, quand $f(u)$ présente des discontinuités ou devient infini qui fait l'objet du présent chapitre.

Faisons d'abord une remarque générale: la façon dont se comporte au voisinage du point $(1, u_0)$ de la circonférence la fonction $F(r, \theta)$, ne dépend que des valeurs de la fonction $f(u)$ dans un intervalle aussi petit qu'on le veut, comprenant le point u_0 à son intérieur. En effet, partagons l'intégrale (1) en deux parties, l'une relative à l'intervalle (a, b) comprenant le point u_0, l'autre relative à l'arc complémentaire S de la circonférence; la deuxième intégrale partielle tend vers zéro quand le point $M(r, \theta)$ tend vers le point $(1, u_0)$, car le dénominateur: $1 - 2r\cos(\theta - u) + r^2$, qui représente le carré de la distance d'un point de l'arc S au point M finit par devenir supérieur à un nombre positif fixe et comme par hypothèse

[1] V. p. ex.: PICARD, *Traité d'analyse*, tome I.

$\int_S |f(u)|\,du$ a une valeur finie, il en résulte que notre intégrale tend vers zéro comme $1-r^2$, de telle sorte que les valeurs de $f(u)$ à l'extérieur de (a, b) n'ont aucune influence sur les valeurs limites de la fonction harmonique.

2. Supposons maintenant qu'au point $u = u_0$, la fonction $f(u)$ devienne infinie en restant positive, de telle sorte qu'elle soit continue pour $u = u_0$, à condition de lui attribuer en ce point la valeur $+\infty$. Il est facile de montrer dans ce cas que $F(r, \theta)$ tend vers $+\infty$ quand le point $M(r, \theta)$ vient à se confondre avec le point $M_0(1, u_0)$. En effet la fonction $f(u)$ sera positive dans un intervalle fini CD entourant le point M_0.



Il suffit d'étudier la partie de l'intégrale de Poisson relative à l'arc CD. Du point M comme centre avec $(1-r)\sqrt{2}$ comme rayon décrivons un arc de cercle qui coupe CD en deux points P et Q. On voit aisément que l'on a:

$$\text{arc } PQ = 2(1-r) \quad [\text{à une quantité près de l'ordre de } (1-r)^2]$$

et

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-u)+r^2} > \frac{1-r^2}{2(1-r)^2} > \frac{1}{2(1-r)}, \text{ pour tous les points de } PQ$$

de sorte que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{PQ} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-u)+r^2} f(u)\,du > \frac{M}{2\pi},$$

si la fonction $f(u)$ est constamment plus grande que M dans le champ

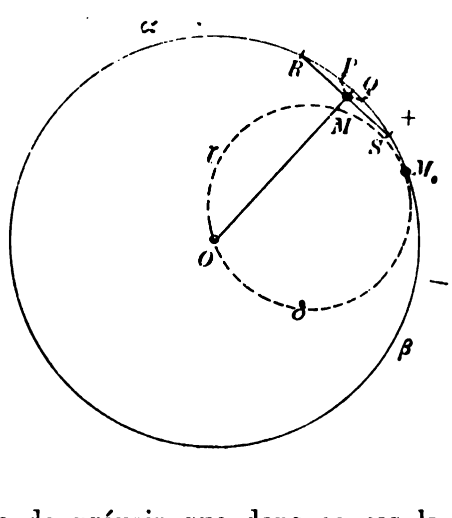
d'intégration. Choisissons alors un nombre positif δ tel que dans l'intervalle $(u_0 - \delta, u_0 + \delta)$, on ait: $f(u) > M$, et prenons:

$$1 - r < \frac{\delta}{2},$$

$$|\theta - u| < \frac{\delta}{2}.$$

Dans ces conditions, tous les points de PQ étant intérieurs à l'intervalle $(u_0 - \delta, u_0 + \delta)$, l'intégrale précédente sera plus grande que $\frac{M}{2\pi}$ et il en sera de même à fortiori si on étend l'intégrale à tous les points de l'arc CD. Il en résulte que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - u) + r^2} f(u)du$ devient plus grande que toute quantité donnée quand le point M tend par un chemin quelconque vers le point M_0.

Examinons ensuite le cas où $f(u)$ devient infinie, en changeant brusquement de signe lorsque u traverse la valeur u_0.



Il est bien facile de prévoir que dans ce cas la fonction harmonique est indéterminée au voisinage du point M_0 et peut s'approcher autant qu'on le veut de tout nombre réel. Pour nous en assurer menons la corde RS perpendiculaire à OM et supposons que le point M_0 soit extérieur

à RS, ce qui aura lieu si M est extérieur au cercle décrit sur OM_0 comme diamètre. Pour tous les points extérieurs à RS, on aura

$$\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - u) + r^2} < 1$$

et la partie correspondante de l'intégrale de Poisson restera moindre que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(u)| du$ et sera donc bornée. Si les points R, P, Q, S se trouvent du côté de M_0 où la fonction $f(u)$ prend des valeurs infinies positives les intégrales:

$$\int_{QP} \quad \text{et} \quad \int_{SR}$$

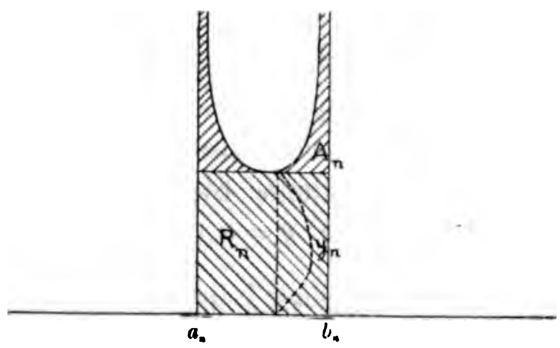
prennent d'après ce qui précède des valeurs infiniment grandes positives quand M tend vers M_0, et il en est de même de l'intégrale de Poisson étendue à toute la circonférence.

Ainsi quand M tend vers M_0 en restant compris dans l'angle $\gamma M_0 \alpha$ des deux circonférences, $F(r, \theta)$ tend vers $+\infty$; au contraire si M tendant vers M_0 reste dans l'angle $\delta M_0 \beta$, $F(r, \theta)$ tend vers $-\infty$. D'autre part $F(r, \theta)$ étant continue à l'intérieur du cercle de rayon 1, il est clair qu'elle pourra s'approcher autant qu'on le veut de toute valeur donnée à l'avance au voisinage du point M_0.

Nous donnerons une application intéressante de ces considérations en construisant une fonction harmonique régulière et constamment positive à l'intérieur d'un cercle C, et *devenant infinie au voisinage d'une infinité non dénombrable de points de la circonférence.*

Considérons, sur une droite, un ensemble parfait, de mesure nulle dont tous les points soient à distance finie. Nous savons qu'un tel ensemble a la puissance du continu. Nous savons aussi qu'il peut s'obtenir en enlevant d'un segment AB une infinité dénombrable d'intervalles, sans point commun deux à deux, et dont la somme des longueurs est égale à la longueur de AB. On les appelle ordinairement d'après M. Baire les intervalles *contigus* à l'ensemble considéré E. Ceci rappelé, je dis qu'il est possible de déterminer une fonction continue, positive, devenant infinie en tous les points de l'ensemble E et qui soit intégrable dans l'intervalle AB.

Soit $(a_n b_n)$ un intervalle contigu à E. Je définis dans cet intervalle une fonction continue positive, devenant infinie aux deux extrémités (a_n, b_n) et intégrable entre ces limites. Soit $\varphi_n(x)$ cette fonction que nous représenterons par une courbe.



Nous poserons:

$$\varphi(x) = \varphi_n(x) \quad \text{dans} \quad (a_n b_n)$$

et

$$\varphi(x) = +\infty \text{ pour tous les points de } E.$$

Pour que la fonction $\varphi(x)$ soit intégrable il faut que la série

$$\int_{a_1}^{b_1} \varphi_1(x)dx + \int_{a_2}^{b_2} \varphi_2(x)dx + \ldots + \int_{a_n}^{b_n} \varphi_n(x)dx + \ldots$$

soit convergente. Pour que $\varphi(x)$ soit continue aux points de E, il faut que le minimum y_n de $\varphi_n(x)$ dans $(a_n b_n)$ devienne infini avec n. Il est aisé de voir que ces conditions ne sont pas contradictoires.

En effet, posons:

$$\text{long. } a_n b_n = s_n$$

l'intégrale $\int_{a_n}^{b_n} \varphi_n(x)dx$ est égale à $s_n y_n$ (qui représente l'aire du rectangle R_n), augmenté de l'aire A_n du domaine compris entre la courbe: $y = \varphi_n(x)$, les deux asymptotes verticales et la tangente au point le plus bas.

Or il est possible de choisir les nombres $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$ augmentant indéfiniment avec n et tels que la série:

$$s_1 y_1 + \ldots + s_n y_n + \ldots$$

soit convergente, car la série $s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots$ étant convergente on peut trouver une série à termes positifs également convergente dont les termes deviennent infiniment grands par rapport à ceux de la première.[1] Ayant ainsi déterminé l'ordonnée du point le plus bas de chacune de nos courbes: $y = \varphi_n(x)$, nous devons les construire de telle sorte que la somme des aires

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$$

ait une valeur finie. Or il est clair que nous pouvons tracer nos courbes de façon que chacune de nos aires A_n soit aussi petite que nous voulons.[2] Il est d'ailleurs permis de faire telle hypothèse que l'on voudra sur la nature analytique de la fonction $y = \varphi_n(x)$, à l'intérieur de l'intervalle (a_n, b_n).

La fonction $\varphi(x)$ étant ainsi bien définie dans l'intervalle AB, sera intégrable dans AB; en outre elle sera continue: cela est évident pour les points qui n'appartiennent pas à E. Soit x' un point de E, $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, des points tendant vers x'. Si x_n appartient à E, on a:

$$\varphi(x_n) = \varphi(x') = +\infty.$$

Si $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ appartiennent à des intervalles contigus à E, il faut, ou bien qu'ils appartiennent à des intervalles de rang de plus en plus élevés et alors $\varphi(x_n)$ tend vers l'∞, en vertu de la façon dont nous avons choisi les minima des fonctions $\varphi_n(x)$. Si au contraire les x_n restent dans des intervalles de rang fini, il faut qu'ils tendent vers l'extrémité de l'un de ces intervalles, et $\varphi(x_n)$ devient encore infini.

Ainsi la fonction $\varphi(x)$, qui est intégrable ne cesse pas d'être continue aux points de E, où elle prend la valeur $+\infty$.

[1] Voir par exemple: BOREL, *Leçons sur les séries à termes positifs*, (Paris, Gauthier-Villars, 1902).

[2] Si l'on choisit, par exemple, des axes tels que les deux asymptotes soient les droites: $x = \pm 1$, l'origine étant le point le plus bas de la courbe, en posant:

$$y = \frac{\varepsilon x^2}{+\sqrt{1 - x^2}}$$

on a une courbe telle que l'aire comprise entre elle, ses deux asymptotes et l'axe des x est égale à $\frac{\pi}{2}\varepsilon$ et peut être rendue aussi petite que l'on veut en choisissant covenablement ε.

Soit donc E un ensemble parfait de mesure nulle de points de la circonférence du cercle C de rayon 1; nous construisons comme il vient d'être expliqué une fonction continue, périodique, devenant infinie aux points de E et sommable, et nous envisageons l'intégrale de POISSON:

$$F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - u) + r^2} f(u)du$$

qui représente bien une fonction harmonique continue sur C, et prenant la valeur $+\infty$ aux points de E; de plus elle reste positive à l'intérieur de C.

3. Pour aller plus loin dans l'étude de l'intégrale de POISSON prenons la dérivée par rapport à θ des différents termes des égalités:

$$F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\theta - u) + r^2} f(u)du$$

$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} r^n(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta).$$

Nous définissons ainsi une nouvelle fonction harmonique:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(1 - r^2)2r\sin(u - \theta)}{[1 - 2r\cos(\theta - u) + r^2]^2} f(u)du$$

$$= \sum_{n=1}^{n=\infty} nr^n(- a_n \sin n\theta + b_n \cos n\theta).$$ [1]

Nous allons démontrer que si en un point u_0, la fonction $f(u)$ admet une dérivée finie $f'(u_0)$, la fonction $\frac{\partial F}{\partial\theta}$ tend vers $f'(u_0)$ quand le point (r, θ) se rapproche indéfiniment du point $(1, u_0)$, suivant le rayon qui y aboutit. Nous donnons donc à θ une valeur constante (on peut prendre $\theta = 0$) et nous cherchons si l'intégrale:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(1 - r^2)2r\sin u}{[1 - 2r\cos u + r^2]^2} f(u)du$$

[1] La dérivation sous le signe $\int$ pour $r < 1$ se justifie très aisément.

tend vers une limite quand r tend vers 1. En faisant $f(u) = u$ (dans $(-\pi, +\pi)$) la fonction $F(r, \theta)$ est connue et l'on trouve ainsi que l'intégrale précédente a pour valeur:

$$\frac{2r}{1+r}$$

et tend vers 1 en même temps que r. On conclut de là qu'on peut sans restreindre la généralité, supposer:

$$f(0) = f'(0) = 0.$$

Posant pour abréger l'écriture

$$\frac{1-r^2}{1-2r\cos u + r^2} = H$$

nous écrirons l'intégrale précédente sous la forme:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H \frac{2r\sin u}{1-2r\cos u + r^2} f(u)\,du.$$

Or si dans l'expression $\dfrac{2r\sin u}{1-2r\cos u+r^2}$, on pose $r = 1$, elle devient $\dfrac{1}{\operatorname{tang}\frac{u}{2}}$, et l'intégrale se réduit à:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H \frac{f(u)}{\operatorname{tang}\frac{u}{2}}\,du$$

qui tend vers zéro avec $1-r$, car $f(u)$ ayant une dérivée nulle pour $u = 0$, $\dfrac{f(u)}{u}$ ou $\dfrac{f(u)}{\operatorname{tang}\frac{u}{2}}$ tend vers zéro avec u, de sorte que la fonction qui multiplie H dans l'intégrale ci-dessus étant continue pour $u = 0$, on se trouve dans le cas classique de l'intégrale de Poisson.

Tout revient donc a démontrer que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H\left\{\frac{2r\sin u}{1-2r\cos u + r^2} - \frac{\sin u}{1-\cos u}\right\} f(u)\,du$$

a aussi une limite nulle, ce qui se voit aisément en la mettant sous la forme

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H \cdot \frac{(1-r)^2}{1-2r\cos u + r^2} \cdot \frac{f(u)}{\tang\frac{u}{2}}\,du$$

car le second facteur qui figure sous le signe $\int$ étant toujours compris entre 0 et 1 l'intégrale précédente est plus petite en valeur absolue que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H \left|\frac{f(u)}{\tang\frac{u}{2}}\right| du$$

qui tend vers zéro d'après un raisonnement que nous venons de faire.

Il est à remarquer que le résultat établi subsiste lorsqu'on suppose seulement que:

$$\lim_{\alpha=0} \frac{f(0+\alpha)-f(0-\alpha)}{2\alpha}$$

existe et est finie; c'est ce qu'on voit facilement en réunissant, dans les intégrales qui précèdent, les éléments qui correspondent à des valeurs égales et de signe contraire de u. On voit aussi sans peine qu'il n'y a rien de changé si cette limite est égale à $+\infty$ ou à $-\infty$.

Supposons maintenant que la fonction dérivée $f'(u)$ existe dans tout un intervalle et soit continue en un point u_0 de cet intervalle. Nous allons montrer que, dans ces conditions, la fonction harmonique $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ prend la valeur $f'(u_0)$ au point u_0, quel que soit le chemin par lequel on parvient à ce point.

En effet la fonction $f'(u)$ étant finie et continue en u_0 est bornée dans un intervalle fini $s = [A, B]$ enfermant ce point; soit S l'arc complémentaire de s: l'intégrale:

$$\frac{1}{2\pi}\int_S \frac{(1-r^2)2r\sin(u-\theta)}{[1+r^2-2r\cos(u-\theta)]^2} f(u)\,du$$

a pour limite zéro, comme le montre un raisonnement déjà employé, et l'on a d'autre part

$$\frac{1}{2\pi}\int_s \frac{(1-r^2)2r\sin(u-\theta)}{[1+r^2-2r\cos(u-\theta)]^2}f(u)du$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(u-\theta)}f(u)\right]_A^B+\frac{1}{2\pi}\int_s \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(u-\theta)}f'(u)du$$

l'intégration par parties étant justifiée par ce fait que dans s la fonction $f'(u)$ est bornée et admet son intégrale indéfinie comme fonction primitive. La partie tout intégrée s'évanouit à la limite et l'autre tend vers $f'(u_0)$ lorsque le point (r, θ) tend vers le point $(1, u_0)$.

En résumé, étant donnée une fonction $f'(u)$ égale à la dérivée d'une fonction continue $f(u)$ de période 2π,[1] il est possible de déterminer une fonction harmonique régulière à l'intérieur d'un cercle et satisfaisant aux conditions suivantes:

1°) en tout point d'argument u_0 de la circonférence, tel que $f'(u_0)$ ait une valeur déterminée, finie ou infinie, la fonction harmonique prend la valeur $f'(u_0)$ quand on s'approche de ce point suivant le rayon;

2°) en tout point u_0 pour lequel $f'(u)$ est finie et continue la fonction harmonique prend la valeur $f'(u_0)$, quel que soit le chemin suivi.

Remarquons d'ailleurs que $f'(u)$ n'étant pas nécessairement bornée peut n'être pas intégrable, de sorte que la solution de problème de Dirichlet (étendu) que nous venons d'obtenir, ne peut pas toujours se mettre sous la forme d'une intégrale de Poisson.

Les résultats qui précèdent vont nous permettre d'étudier l'intégrale de Poisson lorsque la fonction $f(u)$ est une fonction périodique, bornée et sommable; en effet, d'après un théorème de M. Lebesgue, pour un ensemble de valeurs de u dont le complémentaire est de mesure nulle, $f(u)$ est la dérivée de son intégrale indéfinie $F(u)$ (on peut supposer $F(u)$ périodique, en retranchant de $f(u)$ la constante $a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(u)du$. On peut alors employer l'intégration par parties et écrire

[1] On peut évidemment supposer que $f(u)$ présente des infinis ou des discontinuités isolées pourvu qu'elle soit absolument intégrable.

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H_1 f(u)du = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial H_1}{\partial u} F(u)du = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial H_1}{\partial \theta} F(u)du;$$ [1]

on voit alors que pour tous les points u_0 où $f(u)$ est la dérivée de $F(u)$, l'intégrale de POISSON tend vers $f(u_0)$, quand r tend vers 1, θ restant égal à u_0 (c. a. d. lorsqu'on chemine suivant un rayon).

Réciproquement d'ailleurs, si la fonction harmonique $F(r, \theta)$, régulière à l'intérieur du cercle de rayon 1, y reste plus petite en module qu'un nombre fixe, et si l'on a:

$$\lim_{r=1} F(r, \theta) = f(\theta)$$ [sauf peut être pour un ensemble de mesure nulle de valeurs de θ]

la fonction F est celle qui est donnée par l'intégrale de POISSON.

En effet: soit $r < R < 1$. Nous avons

$$F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(R, u)\frac{R^2 - r^2}{R^2 + r^2 - 2Rr\cos(u-\theta)}du.$$

Laissant r et θ fixes, faisons tendre R vers l'unité; la fonction sous le signe $\int$ reste inférieure en valeur absolue à un nombre positif fixe, et tend vers $\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - u)}f(u)$, [sauf pour un ensemble de mesure nulle]. Nous sommes donc en droit d'appliquer le théorème de M. LEBESGUE sur l'interversion des signes *lim* et $\int$,[2] et nous pouvons écrire:

$$F(r, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H_1 f(u)du.$$

Ainsi, le problème de DIRICHLET dans le cas du cercle (avec le sens élargi que nous lui attribuons) n'a qu'une solution, si l'on assujettit la fonction harmonique inconnue à être bornée à l'intérieur du cercle. Des considérations analogues vont nous permettre de donner, en passant, une démonstration simple d'une identité importante, se rattachant à la multiplication des séries de FOURIER.

---

[1] Nous appelons H_1 ce que devient H quand on y remplace u par $(u - \theta)$: H_1 est donc fonction de r, θ, u.

[2] *Leçons sur l'intégration et les fonctions primitives* (Paris, Gauthier-Villars 1904), page 114.

Nous avons:

$$F(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \qquad (r < 1)$$

les a_n et b_n étant les coefficients de la série de Fourier de $f(\theta)$.

Multiplions les deux membres de cette égalité par $F(r, \theta)$ et intégrons de $-\pi$ à $+\pi$; il est permis d'intégrer terme à terme, car la série du second membre est uniformément convergente si $r < 1$; on a ainsi:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F^2(r, \theta) d\theta = a_0 \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(r, \theta) d\theta$$

$$+ \sum_{n=1}^{n=\infty} \left[a_n r^n \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(r, \theta) \cos n\theta d\theta + b_n r^n \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(r, \theta) \sin n\theta d\theta \right].$$

Or on a évidemment:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(r, \theta) \cos n\theta d\theta = a_n r^n,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(r, \theta) \sin n\theta d\theta = b_n r^n,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(r, \theta) d\theta = 2a_0.$$

La formule précédente devient donc:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F^2(r, \theta) d\theta = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) r^{2n}.$$

Faisons tendre r vers 1; d'après ce qui a été dit plus haut, le premier membre tend vers:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(\theta) d\theta.$$

Il en résulte que la série de puissances de r, à coefficients positifs, qui figure au second membre, reste convergente pour $r = 1$, car dans le cas contraire elle deviendrait infinie pour r tendant vers 1; l'application du second théorème d'Abel sur les séries de puissances nous donne alors:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(\theta) d\theta = 2a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

égalité qui remonte à PARSEVAL et sur laquelle M. HURWITZ est revenu dans un article récent des Mathematische Annalen;[1] elle est démontrée ici sous la seule condition que $f(\theta)$ soit une fonction bornée, sommable au sens de M. LEBESGUE. Essayons d'étendre ce résultat au cas où la fonction $f(u)$ est une fonction non bornée dont le carré est intégrable; ayant choisi des nombres $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ croissant de 0 à $+\infty$, nous regardons $f(u)$ comme la limite des fonctions $f_1(u), f_2(u), \ldots, f_n(u), \ldots$ égales à zéro dans l'ensemble mesurable $E_n[|f(u)| > l_n]$ et à $f(u)$ pour les autres valeurs de u; nous considérons également les intégrales de POISSON $F_1(r, \theta) \ldots F_n(r, \theta) \ldots$ correspondant à $f_1(u), f_2(u), \ldots$. Quand l_n tend vers l'infini, $\int_{-\pi}^{+\pi} f_n(u)du$ tend vers $\int_{-\pi}^{+\pi} f(u)du$, et $\int_{-\pi}^{+\pi} f_n^2(u)du$ tend en croissant vers $\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(u)du$; de même, pour des valeurs fixes de r et θ, $F_n(r, \theta)$ tend vers $F(r, \theta)$ et comme on a toujours

$$|F_n(r, \theta)| < \frac{2}{\pi}\frac{1+r}{1-r}\int_{-\pi}^{+\pi} |f(u)|\, du$$

on peut écrire, d'après un théorème connu sur l'intégration:

$$\lim \int_{-\pi}^{+\pi} F_n^2(r, \theta)d\theta = \int_{-\pi}^{+\pi} F^2(r, \theta)d\theta. \tag{1}$$

Mais $f_n(u)$ étant une fonction bornée, nous avons d'après ce qui précède:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F_n^2(r, \theta) < \int_{-\pi}^{+\pi} f_n^2(u)du < \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(u)du$$

d'où, en vertu de l'égalité (1)

$$\int_{-\pi}^{+\pi} F^2(r, \theta)d\theta < \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(u)du$$

c'est à dire:

$$2a_0^2 + \sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2)r^{2n} < \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(u)du$$

[1] *Über die Fourierschen Konstanten integrierbarer Functionen* (Mathematische Annalen, tome 57, 1903). — Voir aussi STEKLOFF (Comptes Rendus, 10 nov. 1902). — PARSEVAL, sav. étr. (tome I, 1806).

on en conclut que la série en r du premier membre, devant rester bornée, converge encore pour $r = 1$, et l'on a

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(u)\,du \geqq 2a_0^2 + \sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2).$$

En réalité l'égalité a bien lieu, mais ce point est un peu plus délicat à démontrer. Nous y reviendrons ultérieurement.

Dans tous les cas, pour toute fonction bornée ou non bornée, dont le carré est intégrable, la série formée par les carrés des coefficients de sa série de FOURIER est convergente. [1]

4. Considérons maintenant la fonction harmonique obtenue en dérivant deux fois l'intégrale de POISSON par rapport à l'argument

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial^2 H_1}{\partial \theta^2} f(u)\,du.$$

Je vais démontrer que si pour une valeur u_0 de u, la fonction $f(u)$ admet une dérivée seconde généralisée, c'est à dire si:

$$\lim_{\Delta u = 0} \frac{f(u_0 + \Delta u) + f(u_0 - \Delta u) - 2f(u_0)}{\Delta u^2} = \varphi(u_0)$$

on a également:

$$\lim_{r=1} \frac{\partial^2 F(r, u_0)}{\partial \theta^2} = \varphi(u_0).$$

On verra sans peine qu'on peut, sans restreindre la généralité, supposer

$$u_0 = f(u_0) = \varphi(u_0) = 0.$$

L'intégrale précédente, en posant: $\theta = 0$, se met alors aisément sous la forme:

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\pi} \frac{2r(1 - r^2)}{\Delta^2}[2r\sin^2 u + 2r - (1 + r^2)\cos u][f(u) + f(-u)]\,du,$$

$$\Delta = 1 + r^2 - 2r\cos u,$$

[1] Il peut être utile de remarquer que si la série $\Sigma a_n^2 + b_n^2$ est convergente, les séries $\sum \frac{a_n}{n^\alpha}$, $\sum \frac{b_n}{n^\alpha}$ sont absolument convergentes pour $\alpha > \frac{1}{2}$.

et l'on a

$$\lim_{u=0} \frac{f(u) + f(-u)}{u^2} = 0 \quad \text{par hypothèse.}$$

Il s'agit de prouver que cette intégrale tend vers zéro avec $1 - r$. Nous poserons encore pour abréger l'écriture:

$$f(u) + f(-u) = g(u),$$

$$\frac{1 - r^2}{\Delta} = H.$$

Nous décomposons I en plusieurs termes. Soit d'abord

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} H \frac{4r^2 \sin^2 u}{\Delta^2} g(u) du.$$

Pour $r = 1$, le second facteur sous le signe $\int$ devient:

$$\frac{4 \sin^2 u}{4(1 - \cos u)^2} = \frac{1}{\operatorname{tang}^2 \frac{u}{2}}$$

et comme $\dfrac{g(u)}{\operatorname{tang}^2 \frac{u}{2}}$ tend vers zéro avec u, c'est à dire est continue pour $u = 0$, on en conclut que:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} H \frac{g(u)}{\operatorname{tang}^2 \frac{u}{2}} du$$

tend vers zéro avec $1 - r$.

On a d'ailleurs:

$$\frac{4r^2 \sin^2 u}{\Delta^2} - \frac{\sin^2 u}{(1 - \cos u)^2} = \frac{(1 - r)^2}{\Delta} \frac{(1 + r)^2 - 4r \cos u}{\Delta} \frac{1}{\operatorname{tang}^2 \frac{u}{2}},$$

$$\frac{(1 - r)^2}{\Delta} < 1, \quad \frac{(1 + r)^2 - 4r \cos u}{\Delta} = \frac{\Delta + 2r(1 - \cos u)}{\Delta} < 2$$

de sorte que le terme complémentaire de I_1 est plus petit en valeur absolue que:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi H\left|\frac{2g(u)}{\operatorname{tang}^2\frac{u}{2}}\right|du$$

qui a pour limite zéro d'après un raisonnement plusieurs fois employé. On a donc

$$\lim_{r=1} I_1 = 0.$$

Considérons maintenant le terme

$$I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi H\left[\frac{4r^2 - 2r(1+r^2)\cos u}{\Delta^2}\right]g(u)du$$

pour $r = 1$, le facteur entre parenthèses devient:

$$\frac{1}{1-\cos u} = \frac{1}{2\sin^2\frac{u}{2}}$$

et nous voyons comme plus haut que l'intégrale

$$\int_0^\pi H\frac{g(u)}{\operatorname{tang}^2\frac{u}{2}}du$$

tend vers zéro.

Il ne reste donc plus à considérer que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi H\left[\frac{4r^2 - 2r(1+r^2)\cos u}{\Delta^2} - \frac{1}{1-\cos u}\right]g(u)du$$

qui se met aisément sous la forme

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi H\frac{(1-r)^2}{\Delta^2(1-\cos u)}[\Delta + 2r\sin^2 u]g(u)du$$

et que nous décomposons encore en deux parties correspondant aux deux termes de la parenthèse. Nous aurons d'abord à considérer l'intégrale:

$$\int_0^\pi H\frac{(1-r)^2}{\Delta}\frac{g(u)}{1-\cos u}du$$

dont on voit de suite que sa limite est nulle. Puis:

$$\int_0^\pi H\left[\frac{2r(1-r)^2\sin^2 u}{\Delta^2}\right]\frac{g(u)}{1-\cos u}du.$$

Or le second facteur reste borné quand r tend vers 1, car on a

$$\frac{(1-r)^2\sin u^2}{\Delta^2}=\left[\frac{(1-r)\sin u}{\Delta}\right]^2=\left[\frac{(1-r)\sin u}{(1-r)^2+4r\sin^2\frac{u}{2}}\right]^2.$$

La quantité élevée au carré est donc plus petit que

$$\frac{\sin u}{1-r},\quad \text{d'une part}$$

et que

$$\frac{(1-r)}{2r\operatorname{tang}\frac{u}{2}},\quad \text{d'autre part,}$$

et reste bornée.

On en déduit que l'intégrale précédente est comparable à

$$\int_0^\pi H\frac{|g(u)|}{u^2}du$$

et a par suite pour limite zéro, et notre proposition se trouve complètement démontrée.[1]

Nous pouvons aussi démontrer que si dans un certain intervalle (A, B) la dérivée seconde généralisée $\varphi(u)$ de $f(u)$ est bornée, et continue en un

---

[1] On peut l'exprimer de cette façon: si $f(u)$ est la dérivée seconde généralisée d'une fonction périodique et continue: $g(u)$, on a:

$$f(u)=\lim_{r=1}\left[-A_1r-4A_2r^2-\ldots-n^2A_nr^n-\ldots\right]$$

$A_0+A_1+A_2+\ldots$ étant la série de Fourier de $g(u)$.

point u_0 de cet intervalle, la fonction harmonique $\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$ prend au point $(1, u_0)$, suivant tous les chemins qui y aboutissent, une valeur limite égale à $\varphi(u_0)$. Pour cela il suffit de remarquer comme nous l'avons fait plus haut, que la fonction $\varphi(u)$ est sommable dans l'intervalle AB, et qu'en outre

$$\int_a^u \int_a^v \varphi(w)\,dw\,dv$$

est égal à $f(u)$, à un terme linéaire près, comme le démontre M. LEBESGUE dans son mémoire sur les séries trigonométriques.[1]

On pourra alors appliquer à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{AB} \frac{\partial^2 H_1}{\partial \theta^2} f(u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{AB} \frac{\partial^2 H_1}{\partial u^2} f(u)\,du$$

deux intégrations par parties ce qui nous ramènera à l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{AB} H_1 \varphi(u)\,du$$

à laquelle s'applique le raisonnement classique de M. SCHWARZ. Si l'on remarque que les parties tout intégrées s'évanouissent à la limite et qu'il en est de même de

$$\int_{C(AB)} \frac{\partial^2 H_1}{\partial \theta^2} f(u)\,du \quad \text{(étendue à l'arc complémentaire de } AB\text{)}$$

on obtient le résultat annoncé.

Nous aurons l'occasion, tout à l'heure, de tirer plusieurs conséquences intéressantes des propositions des paragraphes 3 et 4.

---

[1] Annales de l'École normale, t. 20, p. 491. M. LEBESGUE remarque que $\varphi(u)$ étant bornée, il en est de même du rapport

$$\frac{f(u+a) + f(u-a) - 2f(u)}{a^2}$$

à cause d'une extension, qu'il donne, du théorème des accroissements finis à la dérivée seconde généralisée. Partant de la relation

$$\varphi(u) = \lim \frac{f(u+a) + f(u-a) - 2f(u)}{a^2}$$

il intègre deux fois de suite les deux membres, en intervertissant, comme il est permis, les signes lim et $\int$. On a ainsi le résultat énoncé dans le texte.

Mais faisons voir encore que les résultats obtenus sur les valeurs limites de la fonction $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ subsistent lorsqu'on considère, au lieu de chemins normaux à la circonférence, des chemins faisant des angles finis avec celle-ci. Reprenons donc l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{(1-r^2)2r\sin(u-\theta)}{[1+r^2-2r\cos(u-\theta)]^2} f(u)du = \frac{\partial}{\partial\theta} F(r,\theta)$$

et supposant toujours $f(0) = f'(0) = 0$, faisons tendre θ et $1-r$ vers zéro, en supposant que le rapport $\frac{\theta}{1-r}$ reste borné et inférieur à K.

D'après ce qui a été dit plus haut, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-u)+r^2} \frac{\sin u}{1-\cos u} f(u)du$$

tend vers zéro quand $1-r$ et θ tendent vers zéro.

Il suffira donc de considérer:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H_1\left[\frac{2r\sin(u-\theta)}{1+r^2-2r\cos(u-\theta)} - \frac{\sin u}{1-\cos u}\right] f(u)du.$$

La quantité entre parenthèse s'écrit;

$$\frac{2r\sin(u-\theta) + 2r\sin\theta - (1+r^2)\sin u}{(1-\cos u)[1+r^2-2r\cos(u-\theta)]}$$

$$= \frac{2r[\sin(u-\theta)+\sin\theta-\sin u]}{(1-\cos u)[1+r^2-2r\cos(u-\theta)]} - \frac{(1-r)^2}{1+r^2-2r\cos(u-\theta)} \frac{1}{\tang\frac{u}{2}}.$$

Le second terme du second membre donnera lieu à une intégrale tendant vers zéro avec $1-r$, d'après un raisonnement connu.

Le premier terme s'écrit:

$$\frac{2r\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{u-\theta}{2}}{(1-r)^2+4r\sin^2\frac{u-\theta}{2}} \frac{1}{\sin\frac{u}{2}} < \frac{Kr(1-r)\sin\frac{u-\theta}{2}}{(1-r)^2+4r\sin^2\frac{u-\theta}{2}} \frac{1}{\sin\frac{u}{2}}$$

(en valeur absolue)

il est donc plus petit en valeur absolue, d'une part que:

$$\frac{K \sin \frac{u-\theta}{2}}{1-r} \frac{1}{\sin \frac{u}{2}}$$

et d'autre part que:

$$\frac{K(1-r)}{4 \sin \frac{u-\theta}{2}} \frac{1}{\sin \frac{u}{2}};$$

donc, dans tous les cas, il est inférieur à $\dfrac{K}{\sin \frac{u}{2}}$. On en conclut que l'intégrale qu'il faut démontrer tendre vers zéro est comparable à celle-ci:

$$\frac{K}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H \left| \frac{f(u)}{\sin \frac{u}{2}} \right| du$$

dont l'évanouissement à la limite résulte du raisonnement classique de M. Schwarz.

Il importe d'ailleurs de remarquer que ce qui précède suppose l'existence de la dérivée de $f(u)$ et non pas seulement de la dérivée généralisée

$$\left[\lim \frac{f(u+\Delta u) - f(u-\Delta u)}{2\Delta u} \right].$$

5. On pourrait étudier d'une façon analogue la façon dont se comportent au voisinage de la circonférence les dérivées du premier et du second ordre de $F(r, \theta)$ par rapport à la variable r; mais ce qui sera plus intéressant pour nous, ce sera l'étude de la fonction harmonique conjuguée de F, et représentant la partie imaginaire de la série de Taylor dont F serait la partie réelle; cette fonction $\Phi(r, \theta)$ est définie, à une constante additive près, qui reste arbitraire, par la relation:

$$\Phi(r, \theta) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{2r \sin(u-\theta)}{1 + r^2 - 2r \cos(u-\theta)} f(u) du.$$

Supposant d'abord $f(u)$ finie, continue et périodique nous allons rechercher à quelle condition $\Phi(r, \theta)$ tend vers une limite quand r tend vers l'unité, θ restant fixe, et quelle est cette limite.

Posons:

$$f(\theta + t) - f(\theta - t) = \varphi(t),$$

$$t = u - \theta,$$

$$1 + r^2 - 2r \cos t = \Delta$$

nous aurons à étudier ce que devient l'intégrale:

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\pi} \frac{2r \sin t}{\Delta} \varphi(t) dt$$

quand $1 - r$ tend vers zéro. Nous posons: $\varepsilon = \arcsin(1 - r)$, et nous divisons le champ d'intégration en deux parties $(0, \varepsilon)$ et $(\varepsilon, +\pi)$.

L'intégrale

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\varepsilon} \frac{2r \sin t}{\Delta} \varphi(t) dt$$

est plus petite en valeur absolue que

$$\frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{1 - r} \times \text{max. de } |\varphi(t)| \text{ dans l'intervalle } (0, \varepsilon)$$

et tend vers zéro avec ε, et même uniformément quel que soit θ, à cause de la continuité de f.

Nous avons ensuite

$$(1) \quad -\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{+\pi} \frac{2r \sin t}{\Delta} \varphi(t) dt = -\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{+\pi} \frac{\varphi(t)}{\operatorname{tang}\frac{t}{2}} dt$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{+\pi} \frac{(1-r)^2}{\Delta} \frac{\sin t}{1 - \cos t} \varphi(t) dt = I_1 + I_2.$$

La deuxième intégrale tend vers zéro avec ε ou $1-r$, et même uniformément; on a en effet

$$\Delta = (1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{t}{2},$$

$$\frac{(1-r)^2}{\Delta}\,\frac{\sin t}{1-\cos t} < \frac{(1-r)^2\cos\frac{t}{2}}{4r\sin^3\frac{t}{2}} \qquad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

d'où:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon}^{\eta}\frac{(1-r)^2}{\Delta}\,\frac{\sin t}{1-\cos t}\,dt < \frac{1}{2\pi r}\left[\left(\frac{1-r}{2\sin\frac{t}{2}}\right)^2\right]_{\eta}^{\varepsilon} < \frac{1}{2\pi r}$$

Si nous prenons $\eta = \varepsilon^{\frac{1}{2}}$, nous pourrons donc décomposer l'intégrale I_2 en deux parties correspondant aux intervalles $\left(\varepsilon, \varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$ et $\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}, +\pi\right)$.

La première partie sera plus petite en valeur absolue que $\frac{1}{2\pi r}$, multiplié par le maximum de $|\varphi(t)|$ dans l'intervalle $\left(\varepsilon, \varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$ et tendra uniformément vers zéro avec ε.

La seconde partie sera plus petite que:

$$\frac{1}{2\pi r}\left(\frac{1-r}{2\sin\frac{\eta}{2}}\right)^2 . M$$

M désignant le module maximum de $\varphi(t)$ dans $(0, \pi)$; le facteur élevé au carré ayant une limite nulle, cette deuxième partie tend aussi vers zéro uniformément. *Donc pour que $\Phi(r, \theta)$ ait une limite pour $r = 1$, il faut et il suffit que l'intégrale*

$$(2) \qquad \int_{\varepsilon}^{+\pi} [f(\theta + t) - f(\theta - t)]\,\mathrm{cotang}\,\frac{t}{2}\,dt$$

ait une limite quand ε tend vers zéro par valeurs positives et pour que $\Phi(r, \theta)$ tend uniformément vers la limite quand r tend vers l'unité il faut et il suffiit que l'intégrale (2) *tende uniformément vers la limite.*

Si cette condition est remplie, la fonction harmonique $\Phi(r, \theta)$ prendra

sur le cercle de rayon 1, une suite de valeurs continues et bien déterminées représentées au facteur $\frac{1}{2\pi}$ près, par la limite de l'expression (2) quand ε tend vers zéro; ce sera encore, si l'on veut, la valeur principale (au sens de CAUCHY) de l'intégrale

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta+t)\operatorname{cotang}\frac{t}{2}\,dt.$$

On voit en particulier que si $f(u)$ est à nombres dérivés bornés ou encore satisfait à la condition:

$$|f(u+\delta)-f(u)|<k|\delta|^{a} \tag{3}$$

k et a étant des constantes positives, la fonction $\Phi(r, \theta)$ sera uniformément continue à l'intérieur du cercle et sur le cercle.

Je dis de plus que $f(u)$ satisfaisant à la condition (3); la fonction conjuguée:

$$\varphi(u)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(t)-f(u)]\operatorname{cotang}\frac{t-u}{2}\,dt$$ [1]

satisfera à une condition analogue.

Donnons à u l'accroissement Δu, nous aurons:

$$\varphi(u+\Delta u)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}[f(t)-f(u+\Delta u)]\operatorname{cotang}\frac{t-u-\Delta u}{2}\,dt,$$

$$\begin{aligned}&\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)\\&=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[\frac{f(t)-f(u+\Delta u)}{\operatorname{tang}\frac{t-u-\Delta u}{2}}-\frac{f(t)-f(u)}{\operatorname{tang}\frac{t-u}{2}}\right]dt.\end{aligned} \tag{4}$$

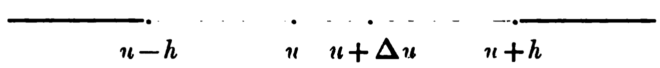
La fonction sous le signe $\int$ peut s'écrire

$$\frac{f(t)-f(u+\Delta u)}{\sin\frac{t-u}{2}\sin\frac{t-u-\Delta u}{2}}\sin\frac{\Delta u}{2}+\frac{f(u)-f(u+\Delta u)}{\operatorname{tang}\frac{t-u}{2}}. \tag{5}$$

[1] La fonction sous le signe $\int$ est dans le cas actuel absolument intégrable; il est donc inutile de parler ici de valeur principale.

Intégrons d'abord de $-\pi$ à $u-h$, et de $u+h$ à $+\pi$, en supposant:

$$h > 2\,|\Delta u|. \tag{6}$$



On aura alors, t variant dans l'un de ces intervalles,

$$\frac{1}{\sin\frac{t-u}{2}\,\sin\frac{t-u-\Delta u}{2}} < \frac{C}{\sin^2\frac{t-u}{2}} = 2C\frac{d}{dt}\left(-\operatorname{cotang}\frac{t-u}{2}\right)$$

C étant une constante positive, car les deux sinus du dénominateur seront toujours de même signe et du même ordre de grandeur.

En outre $f(u)$ étant bornée, on voit que le premier terme de (5) intégré de $-\pi$ à $u-h$, et de $u+h$ à $+\pi$, donnera pour l'intégrale (4) une contribution moindre en valeur absolue que:

$$C'.\,|\Delta u|.\operatorname{cotang}|h|$$

ou simplement

$$C'.\,|\Delta u|.\frac{1}{|h|}$$

où C' désigne une constante fixe.

Ensuite, le second terme de (5), intégré toujours entre les mêmes limites, donnera comme résultat zéro.

Il nous reste a évaluer une limite supérieure de l'intégrale (4) quand les limites d'intégrations sont $u-h$ et $u+h$. En tenant compte de la relation (3) on trouve facilement que les termes ainsi obtenus ont une somme moindre en valeur absolue que:

$$C''.\,|h|^{a}.$$

On a donc en définitive:

$$|\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)| < C'\frac{|\Delta u|}{|h|} + C''|h|^{a}.$$

Si l'on prend par exemple:

$$|h| = |\Delta u|^{\frac{1}{a+1}}$$

(ce qui est compatible avec la condition 6, pour Δu suffisamment petit) on obtient:

$$|\varphi(u+\Delta u)-\varphi(u)|<(C'+C'')|\Delta u|^{\frac{a}{a+1}}.$$

Une condition de la forme (3) s'appelle généralement condition de LIPSCHITZ; nous pouvons donc dire que *si la partie réelle d'une série de Taylor est continue sur son cercle de convergence et satisfait à une condition de Lipschitz, la partie imaginaire est également continue et satisfait à une condition de même forme.*[1]

Nous avons supposé dans ce qui précède la fonction $f(u)$ finie et continue de 0 à 2π; on voit sans peine que nos conclusions subsistent si la fonction $f(u)$, supposée intégrable, n'est continue que dans un certain intervalle.

Les raisonnements précédents montrent aussi que si $f(u)$ est une fonction bornée et sommable, à laquelle correspond la fonction harmonique $F(r,\theta)$, la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction harmonique conjuguée $\Phi(r,\theta)$ reste bornée à l'intérieur du cercle de convergence est que l'intégrale

$$\int_{\varepsilon^2}^{\pi}[f(\theta+t)-f(\theta-t)]\operatorname{cotang}\frac{t}{2}\,dt$$

reste bornée quels que soient ε et θ. La fonction f ne peut pas dans ce cas, avoir des discontinuités de première espèce, car si f présente une telle discontinuité au point θ, $\Phi(r,\theta)$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ quand r tend vers 1.

En résumé, nous avons pu, grâce, surtout à l'extension si importante de la notion d'intégrale due à M. LEBESGUE, faire l'étude de l'intégrale de POISSON dans des cas bien plus étendus que ceux qui avaient été examinés jusqu'ici.

Des différents résultats acquis dans ce chapitre, nous retiendrons particulièrement le suivant: *l'intégrale de Poisson, correspondant à une fonction périodique, bornée et sommable, représente une fonction harmonique qui, en tous les points de la circonférence, (sauf peut-être aux points d'un ensemble*

[1] La série est alors uniformément convergente sur son cercle de convergence, comme il résulte de l'étude des séries de FOURIER.

de mesure nulle) prend une valeur bien déterminée lorsqu'on tend vers l'un de ces points en suivant un chemin non tangent à la circonférence.

Le fait serait d'ailleurs évident si la fonction $f(u)$ était intégrable au sens de RIEMANN, car ses points de discontinuité formeraient alors un ensemble de mesure nulle; mais nous verrons combien il est nécessaire de se placer au point de vue tout à fait général que nous avons adopté.

DEUXIÈME PARTIE.

Étude de la série de Taylor sur son cercle de convergence.

1. Considérons une série de TAYLOR dont nous supposerons dans tout ce qui suit le rayon de convergence égal à l'unité; soit

$$\varphi(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots. \tag{1}$$

Si nous posons:

$$c_n = a_n - ib_n,$$

$$z = re^{i\theta}$$

elle se mettra sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(z) &= P(r,\theta) + iQ(r,\theta), \\ P(r,\theta) &= \quad a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n \sin n\theta)r^n, \\ Q(r,\theta) &= -b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sin n\theta - b_n\cos n\theta)r^n. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Les coefficients a_n et b_n sont donnés par les formules: [1]

---

[1] Voir au sujet de ces formules: HARNACK, *Fundamentalsätze der Functionentheorie* Math. Annalen, tome 21.

$$(3)\quad \begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} P(r\,,\,\theta)d\theta, \\ b_0 = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} Q(r\,,\,\theta)d\theta, \\ a_n = \dfrac{1}{\pi r^n}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} P(r\,,\,\theta)\cos n\theta d\theta = \dfrac{1}{\pi r^n}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} Q(r\,,\,\theta)\sin n\theta d\theta \\ b_n = \dfrac{1}{\pi r^n}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} P(r\,,\,\theta)\sin n\theta d\theta = \dfrac{1}{\pi r^n}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} - Q(r\,,\,\theta)\cos n\theta d\theta \end{cases}$$

dans lesquelles on donne à r une valeur plus petite que 1. Si, lorsque r tend vers 1, $P(r\,,\,\theta)$ et $Q(r\,,\,\theta)$ tendent uniformément vers $f(\theta)$ et $g(\theta)$ (fonctions continues de θ), autrement dit si la série de TAYLOR $f(z)$ est uniformément continue à l'intérieur de son cercle de convergence et sur le cercle, on peut écrire, en faisant tendre r vers l'unité dans les formules (3):

$$(4)\quad \begin{cases} a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)d\theta, \\ b_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} -g(\theta)d\theta, \\ a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\cos n\theta d\theta = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} g(\theta)\sin n\theta\, d\theta, \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} -g(\theta)\cos n\theta d\theta \end{cases}$$

ce qui revient à dire que $P(r\,,\,\theta)$, $Q(r\,,\,\theta)$ sont exprimables à l'aide de la formule de POISSON:

$$(4')\quad \begin{cases} P(r\,,\,\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(u-\theta)+r^2} f(u)du, \\ Q(r\,,\,\theta) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(u-\theta)+r^2} g(u)du \end{cases}$$

et l'on voit aussi que, dans ce cas, l'étude de la convergence de la série de TAYLOR sur son cercle de convergence est ramenée à l'étude de séries de FOURIER correspondant aux fonctions $f(u)$ et $g(u)$.

Mais nous allons voir que les formules (4) et (4') sont applicables dans des cas beaucoup plus étendus que celui dont nous venons de parler.[1]

Supposons simplement que $\varphi(z)$ soit bornée à l'intérieur de son cercle de convergence, mais ne faisons *à priori* aucune hypothèse sur l'existence de valeurs limites de $\varphi(z)$ pour les points du cercle. Nous allons voir que les formules (4) et (4') sont encore applicables.

Il est un peu plus commode de supposer $c_0 = 0$, nous aurons alors

$$\varphi(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots.$$

Considérons également la série de TAYLOR:

$$\psi(z) = \frac{c_1 z}{1} + \frac{c_2 z^2}{2} + \dots + \frac{c_n z^n}{n} + \dots = \int_0^z \frac{\varphi(z)}{z} dz. \tag{5}$$

Elle représente une fonction de z qui reste bornée à l'intérieur du cercle de convergence; qui en outre, est uniformément continue à l'intérieur du cercle de convergence et sur ce cercle, comme il résulte de l'inégalité:

$$|\psi(z') - \psi(z'')| = \left| \int_{z'}^{z''} \frac{\varphi(z)}{z} dz \right| < |z' - z''| \cdot M, \tag{6}$$

M désignant le module maximum de $\frac{\varphi(z)}{z}$.

Si donc on pose

$$\psi(z) = U(r, \theta) + iV(r, \theta)$$

on pourra exprimer U et V par les formules:

$$U = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(u - \theta) + r^2} h(u) du,$$

$$V = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(u - \theta) + r^2} k(u) du,$$

[1] Comptes Rendus, février 1905.

$h(u)$ et $k(u)$ étant des fonctions continues de u. Mais, en appliquant l'inégalité (6) aux points du cercle de convergence, on voit immédiatement que $h(u)$ et $k(u)$ sont des fonctions de u à nombres dérivés bornés. Elles admettent donc une dérivée pour un ensemble de valeurs de u, dont le complémentaire est de mesure nulle.

Mais nous avons les relations:

$$P(r,\theta) = \frac{\partial V(r,\theta)}{\partial\theta},$$

$$Q(r,\theta) = -\frac{\partial U(r,\theta)}{\partial\theta}.$$

Il résulte donc du chapitre précédent que pour toutes les valeurs u_0 de u pour lesquelles les fonctions $h(u)$ et $k(u)$ ont des dérivées, les fonctions harmoniques P et Q prennent des valeurs bien déterminées quand le point (r,θ) tend vers le point $(1, u_0)$ suivant un chemin non tangent à la circonférence. On pourra, en outre, appliquer les formules (4′), dans lesquelles $f(u)$ et $g(u)$ désignent non plus des fonctions continues, mais des fonctions bornées et sommables qui représentent, en général, la valeur limite de $P(r,\theta)$, $Q(r,\theta)$ pour $r = 1$. On peut si l'on veut, pour définir ces fonctions avec précision, admettre qu'elles représentent toujours la plus grande limite, ou la plus petite limite des fonctions P et Q pour r tendant vers l'unité. Nous ferons en général cette hypothèse.

D'ailleurs ces deux fonctions f et g ne sont pas indépendantes et nous savons qu'elles doivent satisfaire à cette condition que les intégrales:

$$\int_{\varepsilon^2}^{+\pi}\{f(\theta+t)-f(\theta-t)\}\cot g\frac{t}{2}\,dt \quad \text{et} \quad \int_{\varepsilon^2}^{\pi}\{g(\theta+t)-g(\theta-t)\}\cot g\frac{t}{2}\,dt$$

restent bornées quel que soient ε et θ.

Nous voyons aussi que les coefficients a_n et b_n tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$, et même que la série

$$\sum_0^\infty (a_n^2+b_n^2) = \sum_0^\infty |c_n|^2$$

est convergente. Si donc, pour une série de Taylor, de rayon de convergence égal à un, cette condition n'est pas remplie, on peut affirmer

qu'elle n'est pas bornée, c-est-à-dire qu'elle prend des valeurs infiniment grandes, au voisinage de certains points de son cercle de convergence.

En tout point régulier du cercle de convergence, les fonctions $f(u)$ et $g(u)$ ayant des dérivées, leurs séries de FOURIER sont convergentes; il en résulte que $\varphi(z)$ est convergente en tout point régulier de son cercle de convergence.

Aux points u_0 pour lesquels $|f(u)-f(u_0)|, |g(u)-g(u_0)|$ sont les dérivées de leur intégrale indéfinie, c'est-à-dire *presque partout*, la série est sommable par le procédé de la moyenne arithmétique, ainsi qu'il résulte d'une proposition de M. LEBESGUE (C. R. de l'Académie des Sciences, 22 mai 1905).

2. Nous allons donner immédiatement une application de ces généralités en montrant qu'elles permettent d'ajouter un complément intéressant à la célèbre proposition d'EISENSTEIN, concernant le développement en série des fonctions algébriques.[1] HERMITE, dans son cours de la Faculté des Sciences, a donné à cette proposition la forme suivante: Si une série de TAYLOR à coefficients rationnels, représente une branche de fonction algébrique, on peut toujours ramener cette série à avoir ses coefficients entiers (sauf le premier), en multipliant la variable par un entier convenable.

Considérons une série de TAYLOR à coefficients entiers; je dis qu'*elle ne peut représenter une fonction algébrique que si son rayon de convergence est plus petit que l'unité, à moins qu'elle ne soit égale à une fraction rationnelle dont tous les pôles sont des racines de l'unité.*

Supposons en effet que:

$$y = f(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots,$$

où $c_0, c_1, c_2, \dots$ sont des entiers et où $\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} = 1$, satisfasse à une équation algébrique irréductible:

$$F(y, z) = 0;$$

F sera nécessairement à coefficients entiers. Soit $P(z)$ le coefficient de la plus haute puissance de y dans F; la fonction algébrique $u = y . P(z)$ n'aura pas de pôle à distance finie; donc en multipliant le polynôme à coefficients entiers $P(z)$ par la série à coefficients entiers $f(z)$, on obtient

[1] Comptes Rendus, février 1904.

une série de TAYLOR $\varphi(\mathfrak{z})$, de rayon de convergence égal à un et qui doit rester bornée à l'intérieur de son cercle de convergence; il faut pour cela que les coefficients de $\varphi(\mathfrak{z})$ tendent vers zéro quand leur rang augmente indéfiniment et comme ces coefficients sont des entiers, cela ne peut se produire que s'ils sont constamment nuls à partir d'un certain rang, et $\varphi(\mathfrak{z})$ se réduisant à un polynôme, on voit que $f(\mathfrak{z})$ est égale à une fraction rationnelle.

Proposons nous maintenant de déterminer toutes les fractions rationnelles

$$\frac{A(\mathfrak{z})}{B(\mathfrak{z})}$$

développables en série entière en $\mathfrak{z}$, à coefficients entiers, de rayon de convergence égal à un. — A et B sont supposés à coefficients entiers, on suppose en outre qu'ils n'ont pas de diviseur commun. On peut alors déterminer deux polynômes à coefficients entiers A_1 et B_1 tels que l'on ait

$$AA_1 + BB_1 = N$$

N étant un entier différent de zéro. Si $\frac{A}{B}$ se développe en série entière à coefficients entiers, il en sera de même de:

$$A_1\frac{A}{B} + B_1 = \frac{N}{B} = \frac{\nu}{\alpha + \beta\mathfrak{z} + \ldots + \lambda\mathfrak{z}^q}.$$

Nous supposons les entiers $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \nu)$ premiers dans leur ensemble. Soit donc:

$$\frac{\nu}{\alpha + \beta\mathfrak{z} + \ldots + \lambda\mathfrak{z}^q} = a_0 + a_1\mathfrak{z} + \ldots \tag{7}$$

par suite:

$$\nu = a_0\alpha$$

et soit p un diviseur premier de α. On peut supposer que les entiers $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ ne sont pas tous divisibles par p, sinon on aurait une égalité de même forme en divisant par p les deux membres de (7). Soit a_n le premier coefficient non divisible par p. On peut écrire:

$$\nu = (\alpha + \beta\mathfrak{z} + \ldots + \lambda\mathfrak{z}^q)(a_0 + a_1\mathfrak{z} + \ldots + a_{n-1}\mathfrak{z}^{n-1})$$
$$+ (\alpha + \beta\mathfrak{z} + \ldots + \lambda\mathfrak{z}^q)(a_n\mathfrak{z}^n + \ldots).$$

On en déduit que la série

$$(\alpha + \beta z + \dots + \lambda z^q)(a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots)$$

une fois ordonnée aura tous ses coefficients divisibles par p:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha a_n \equiv 0 \\ \alpha a_{n+1} + \beta a_n \equiv 0 \\ \alpha a_{n+2} + \beta a_{n+1} + \gamma a_n \equiv 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \pmod{p}$$

et comme par hypothèse on a:

$$\alpha \equiv 0 \pmod{p} \quad \text{et} \quad a_n \not\equiv 0 \pmod{p}$$

on déduit de là de proche en proche,

$$\beta \equiv 0 \pmod{p}, \qquad \gamma \equiv 0 \pmod{p}, \quad \dots .$$

Les coefficients $(\alpha, \beta, \dots, \lambda, \nu)$ ne seraient donc pas premiers dans leur ensemble. Il faut donc que l'on ait $p = 1$, et par suite α doit être égal à l'unité. Autrement dit $B(z)$ est égal à un facteur constant près à:

$$1 + \beta z + \gamma z^2 + \dots + \lambda z^q$$

où $\beta, \gamma, \dots, \lambda$ sont des entiers. Le produit des modules des zéros de ce polynôme est égal à $\pm \frac{1}{\lambda}$; mais comme d'autre part les pôles de $\frac{A(z)}{B(z)}$ doivent avoir des affixes supérieures ou égales en module à l'unité, puisque le rayon de convergence doit être égal à l'unité, il faut que l'on ait:

$$\lambda = \pm 1$$

et que toutes les racines de $B(z)$ aient pour module 1. Mais, d'après un théorème de KRONECKER, un nombre entier algébrique qui a pour module 1, ainsi que tous les nombres conjugués, est une racine de l'unité. Donc $B(z)$ est un polynôme de division du cercle ou un produit de plusieurs polynômes de cette espèce et la fraction $\frac{A(z)}{B(z)}$ pourra par suite se ramener à la forme

$$\frac{P(z)}{(1 - z^k)^h} . \tag{8}$$

Ainsi, les seules fractions rationnelles développables en série entière à coefficients entiers, avec un rayon de convergence égal à 1, sont les fractions rationnelles de la forme (8).

Considérons maintenant une série de TAYLOR dont les coefficients n'ont qu'un nombre limité de valeurs, par exemple 0 et 1, on a alors

$$f(z) = z^\alpha + z^\beta + \cdots + z^\lambda + \cdots$$

$\alpha, \beta, \lambda, \ldots$ étant des entiers croissants. Appelons point singulier isolé d'ordre fini d'une fonction analytique, un point singulier isolé z_0 au voisinage duquel on a:

$$|\varphi(z)| < \left|\frac{k}{(z - z_0)^\alpha}\right|$$

α et k étant des constantes. Cela étant, je dis que la série de TAYLOR $f(z)$ a nécessairement sur son cercle de convergence d'autres points singuliers que des points singuliers isolés d'ordre fini. En effet, s'il n'en était pas ainsi, en multipliant $f(z)$ par un polynôme ayant pour zéros les points singuliers en question avec des ordres de multiplicité convenables, on aurait une nouvelle série de TAYLOR qui devrait rester bornée à l'intérieur du cercle de rayon 1, et dont les coefficients devraient donc tendre vers zéro. Or ces coefficients n'ayant aussi qu'un nombre limité de valeurs, cela est impossible s'ils ne sont pas constamment nuls à partir d'un certain rang, c'est-à-dire si $f(z)$ n'est pas égale à une fraction rationnelle.

On voit en particulier que $f(z)$ ne peut pas être algébroïde dans un cercle de rayon plus grand que 1.[1]

Nous avons, dans ce qui précède, quelques exemples des liaisons qui existent entre la nature arithmétique des coefficients d'une série de TAYLOR et la nature analytique de la fonction qu'elle représente.

Donnons maintenant quelques extensions de la proposition énoncée au début de ce chapitre. Soit D un domaine limité par un contour simple C et dont on puisse faire la représentation conforme sur le cercle (ce qui aura lieu par exemple si C est formé d'arcs réguliers de courbes analytiques) et $f(z)$ une fonction analytique régulière et bornée dans D. En

[1] Relativement aux séries entières à coefficients entiers, je rappelle que M. BOREL a obtenu un résultat très intéressant (v. p. exemple, ses leçons sur les fonctions méromorphes, Paris, Gauthier-Villars, 1903).

tous les points de C, sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle, $f(z)$ prend une valeur déterminée suivant les chemins non tangents à C et l'on pourra par suite appliquer la formule de CAUCHY:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_C \frac{f(u)}{u-z}\,du.$$

Enfin on peut étendre encore la proposition au moyen d'une transformations homographique effectuée sur $f(z)$. S'il existe un nombre A tel que $f(z)-A$ reste supérieure en module à un nombre positif fixe, la fonction $\frac{1}{f(z)-A}$ sera régulière et bornée à l'intérieur de D, de telle sorte qu'on pourra lui appliquer la proposition précédente; par suite $f(z)$ aura aussi, en général, une valeur déterminée, finie ou infinie, aux points du contour mais il n'est pas certain que la même propriété s'applique à la partie réelle et à la partie imaginaire de $f(z)$ considérées séparément; il faudrait démontrer pour que cela fût vrai, que $f(z)$ ne peut prendre une valeur infinie qu'en un ensemble de mesure nulle de points de contour, et bien que cela paraisse très vraisemblable, nous n'avons pas réussi à en donner une démonstration générale.

Comme applications considérons la série $\sum \frac{A_n}{z-a_n}$, les points $a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant des points du segment $0-1$ de l'axe réel, partout denses, et la série $\sum |A_n|$ étant convergente. C'est un cas particulier des séries étudiées par M. BOREL dans sa thèse,[1] en vue de l'extension de la notion de prolongement analytique. La série que nous considérons définit une fonction analytique qui admet le segment $0-1$ comme ligne singulière essentielle.

Supposons les A_n positifs et donnons à z une valeur, $x+iy$, y étant positif. Si l'on pose $z-a_n=\rho_n e^{i\omega_n}$, la partie imaginaire de $\varphi(z)$ est égale à

$$+\,i\sum -\frac{A_n}{\rho_n}\sin\omega_n$$

et comme on a $0<\omega_n<\pi$, le coefficient de i est négatif; donc lorsqu'on reste, par exemple, dans le demi-plan supérieur $\varphi(z)$ reste bornée *projective-*

[1] E. BOREL, *Sur quelques points de la théorie des fonctions*, première partie (Annales de l'Ecole normale, 1895) et *Leçons sur la théorie des fonctions*.

ment. On en conclut que tous les points du segment $0 - 1$, sauf ceux d'un ensemble de mesure nulle, sont des points où $\varphi(\mathfrak{z})$ prend, au sens déjà souvent expliqué, une valeur déterminée, ce qui concorde avec les résultats de M. Borel.

Au contraire, la première des fonctions uniformes affectées de coupure qui se soit présentée en analyse, la fonction modulaire, présente une indétermination becaucoup plus complète au voisinage de cette coupure, ainsi qu'il résulte des recherches de Riemann et Dedekind.[1]

3. *Etude de l'intégrale de Poisson lorsque la fonction $f(u)$ qui figure sous le signe $\int$ est une fonction non bornée, intégrable en valeur absolue.*[2]

Cette étude peut se faire comme lorsque $f(u)$ est une fonction bornée. Car $f(u)$ étant, sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle, égale à la dérivée de son intégrale indéfinie, on pourra raisonner exactement de la même manière que lorsque $f(u)$ est bornée, et l'on arrivera aux mêmes conclusions que dans le premier chapitre. Toutefois nous préférons rattacher ce cas à celui où $f(u)$ est bornée, la méthode indirecte que nous emploierons conduisant à quelques résultats nouveaux; nous supposerons que non seulement $f(u)$ est intégrable entre $-\pi$ et $+\pi$ mais qu'il en est de même de son carré. Posons donc

$$P(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(u - \theta) + r^2} f(u)\,du$$

et supposons d'abord que $f(u)$ soit une fonction positive, dont le carré est intégrable.

On a vu dans le premier chapitre que si l'on écrit:

$$P(r, \theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin \theta) r^n$$

[1] On pourra lire à ce sujet une lettre d'Hermite à Stieltjes (17 décembre 1886). — (Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, Paris, Gauthier-Villars 1905, page 196.)

[2] Nous n'avons pas placé cette étude dans la première partie, parce que nous avons dû nous servir du théorème établi dans le § 1 de la seconde partie.

la série

$$2a_0^2 + \sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2)$$

est convergente. Soit $Q(r, \theta)$ la fonction harmonique conjuguée de $P(r, \theta)$

$$Q(r, \theta) = b_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta) r^n$$

et soit:

$$\varphi(z) = P(r, \theta) + iQ(r, \theta), \qquad (z = re^{i\theta}).$$

On a:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} P^2(r, \theta)\,d\theta = 2a_0^2 + \sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2) r^{2n},$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} Q^2(r, \theta)\,d\theta = 2b_0^2 + \sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2) r^{2n},$$

d'où:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |\varphi(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^\infty (a_n^2 + b_n^2) r^{2n}$$

et comme la série du second membre converge encore pour $r = 1$, on voit que

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |\varphi(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

reste bornée quand r tend vers 1. Il en résulte qu'on ne peut avoir

$$\lim_{r=1} |\varphi(re^{i\theta})| = +\infty$$

que pour un ensemble de mesure nulle de valeurs de θ, sinon on démontrerait par un raisonnement analogue à celui qu'emploie M. Lebesgue,[1] que l'intégrale qui précède devrait croître indéfiniment.

Mais d'autre part, $P(r, \theta)$ étant constamment positive, la fonction analytique $\frac{1}{\varphi(z) + 1} = \frac{1}{P + iQ + 1}$ est bornée dans C; on en déduit comme

[1] *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, page 114.

on vient de le voir que, $\varphi(z)$ a, en général,[1] une valeur limite déterminée suivant les rayons et comme cette valeur est en général finie, on voit bien que $P(r, \theta)$, $Q(r, \theta)$ ont, sauf pour un ensemble de mesure nulle de valeurs de θ une valeur limite bien déterminée pour $r = 1$.[2]

Posons

$$\lim_{r=1} P(r, \theta) = f_1(\theta)$$

dans l'ensemble des valeurs de θ où cette limite existe.

Je dis que l'on a en général:

$$f_1(\theta) = f(\theta).$$

Pour le démontrer établissons d'abord le lemme suivant:

Si des fonctions positives, bornées sommables: $f_1(x), f_2(x), \ldots$ tendent vers une fonction bornée ou non $f(x)$ et si

$$\int_a^b f_n(x)dx$$

reste, quel que soit n, inférieur à un nombre fixe, la fonction $f(x)$ est intégrable, et l'on a:

$$\int_a^b f(x)dx \leqq \text{lim. inf.} \int_a^b f_n(x)dx.$$

La fonction $f(x)$ est mesurable. Soit E l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles on a:

$$f(x) \leqq L.$$

Considérons la fonction:

$$\begin{aligned} \varphi_n(x) &= f_n(x) \text{ pour l'ensemble des valeurs de } x \text{ telles que: } f_n(x) \leqq L, \\ \varphi_n(x) &= f(x) \text{ pour l'ensemble des valeurs de } x \text{ telles que: } f_n(x) > L. \end{aligned}$$

Pour les points de E les fonctions $\varphi_n(x)$ sont bornées dans leur ensemble et tendent vers $f(x)$, on aura donc

$$\lim \int_E \varphi_n(x)dx = \int_E f(x)dx.$$

[1] Pour abréger, nous dirons souvent: »en général», au lieu de »sauf exception pour un ensemble de mesure nulle de points ou de valeurs de la variable.»

[2] Il résulte de ce raisonnement que si une fonction harmonique est régulière et bornée à l'intérieur d'un cercle, elle pourra être mise sous la forme d'une intégrale de POISSON.

Mais comme on a toujours dans E $\varphi_n \leqq f_n$, on en déduit:

$$\int f(x)dx \leqq \text{lim. inf.} \int_E f_n(x)dx \leqq \text{lim. inf.} \int_a^b f_n(x)\,dx < k.$$

Donnons à L des valeurs positives de plus en plus grandes; nous voyons que l'intégrale $\int_E f(x)dx$ tend vers une limite finie, qui sera égale à $\int_a^b f(x)dx$, et l'on a bien:

$$\int_a^b f(x)dx \leqq \text{lim. inf.} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Si pour un ensemble de mesure nulle de valeurs de x, $f_n(x)$ n'a pas de limite ou a une limite infinie, il n'y a rien à changer à ce qui précède.

On peut se rendre compte sur des exemples, que l'on peut avoir

$$\int_a^b f(x)dx < \text{lim. inf.} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Je dois cette remarque à M. Lebesgue.

Ceci dit, revenons à l'intégrale de Poisson

$$P(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_1 f(u)du$$

et considérons la fonction positive $f(u)$ comme limite de la fonction bornée sommable $f_n(u)$, égale à $f(u)$ dans l'ensemble $E_n[f(u) \leqq l_n]$ et égale à zéro dans l'ensemble complémentaire. On aura:

$$P_n(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_1 f_n(u)du < \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_1 f(u)du = P(r, \theta).$$

Mais $f_n(u)$ étant bornée, on aura sauf pour un ensemble F_n de mesure nulle:

$$\lim_{r=1} P_n(r, \theta) = f_n(\theta)$$

d'où:

$$\text{lim. inf.}_{r=1} P(r, \theta) \geqq f_n(\theta).$$

Mais on a $f_n(\theta) = f(\theta)$ pour tous les points de l'ensemble E_n. Or l'en-

semble des points communs à tous les ensembles $C(E_n)$ a une mesure nulle; il en est de même de l'ensemble $(F_1 + F_2 + \ldots + F_n + \ldots)$. On aura donc:

$$\liminf_{r=1} P(r, \theta) \geqq f(\theta)$$

sauf dans un ensemble de mesure nulle; et par suite

$$(9) \qquad f_1(\theta) \geqq f(\theta)$$

dans l'ensemble des points où $P(r, \theta)$ a, pour $r = 1$, une limite: $f(\theta)$.

Mais d'après le lemme que nous venons de démontrer: on a

$$\liminf \int_{-\pi}^{+\pi} P(r, \theta) d\theta \geqq \int_{-\pi}^{+\pi} f_1(\theta) d\theta$$

et comme on a toujours:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} P(r, \theta) d\theta = 2\pi a_0 = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) d\theta$$

on en conclut:

$$(10) \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} f_1(\theta) d\theta \leqq \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) d\theta$$

et par suite, en vertu de l'inégalité (9):

$$\int_{-\pi}^{+\pi} (f_1 - f) d\theta = 0$$

la fonction intégrée étant constamment positive ou nulle (dans l'ensemble complémentaire d'un ensemble de mesure nulle), on conclut de là facilement

$$f_1(\theta) = f(\theta) \quad \text{(en général)}.$$

Car chacun des ensembles $E\left(\frac{1}{n+1} \leqq f_1 - f < \frac{1}{n}\right)$ aura une mesure nulle et il en sera de même de la somme de tous ces ensembles.

En résumé, si $f(u)$ est une fonction non bornée, positive, dont le carré est sommable, et si l'on considère l'intégrale de Poisson:

$$P(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H f(u) du$$

on a en général: $\lim_{r=1} P(r, \theta) = f(\theta)$.

Du cas de $f(u) > 0$, on passe facilement au cas de $f(u) < 0$, et aussi au cas de $f(u)$ bornée supérieurement ou inférieurement.

Si maintenant $f(u)$ n'est bornée ni supérieurement ni inférieurement on peut la regarder successivement comme limite des fonctions bornées supérieurement, puis comme limite de fonctions bornées inférieurement et définies toujours de la façon suivante: ayant choisi des nombres $l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots$ échelonnés de 0 à $+\infty$, on posera:

1° $f_n(u)=f(u)$ dans l'ensemble $E_n[f(u) \leqq l_n]$ et $f_n(u)=0$, partout ailleurs;

$$P_n(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_1 f_n(u) du < P(r, \theta)$$

2°) $f_n^1(u) = f(u)$ dans l'ensemble $E_n^1[f(u) \geqq -l_n]$, et $f_n^1(u) = 0$ partout ailleurs;

$$P_n^1(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H_1 f_n^1(u) du \geqq P(r, \theta).$$

On aura alors les inégalités:

$$\lim_{r=1}. \inf. P(r, \theta) \geqq \lim_{r=1}. \sup. P_n(r, \theta),$$

$$\lim_{r=1}. \sup. P(r, \theta) \leqq \lim_{r=1}. \inf. P_n^{(1)}(r, \theta).$$

En appliquant des raisonnements déjà employés, on en déduira facilement:

$$\lim_{r=1} P(r, \theta) = f(\theta)$$

sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle. [1]

Ceci va nous permettre de compléter ce que nous avons dit au sujet de la formule de Parseval, dans le cas où l'on considère une fonction non bornée dont le carré est sommable. Nous avons démontré que l'on a:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(u) du \geqq 2a_0^2 + \sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2).$$

Mais d'autre part puisque l'on a, en général,

$$\lim_{r=1} P(r, \theta) = f(\theta)$$

[1] Indiquons encore brièvement une déduction facile de la méthode employée dans le texte: *toute fonction harmonique régulière et limitée inférieurement dans C est la somme d'une intégrale de Poisson et d'une fonction harmonique qui reste positive dans C et qui prend la valeur zéro sur C, sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle.*

on en déduit en appliquant le lemme établi plus haut:

$$\lim \int_{-\pi}^{+\pi} P^2(r, \theta) d\theta \geqq \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(u) du,$$

c'est-à-dire:

$$2a_0^2 + \sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2) \geqq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(u) du.$$

On a donc, dans tous le cas, quand $f(u)$ est une fonction dont le carré est sommable:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(u) du = 2a_0^2 + \sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2),$$

a_n, b_n étant les constantes d'EULER-FOURIER attachées à $f(u)$. Soient maintenant deux fonctions périodiques dont le carré soit sommable: $f(u)$ et $g(u)$. On voit aisément que $(f(u) + g(u))^2$ est aussi sommable, et qu'il en est de même de $(f(u) - g(u))^2$. Appliquant l'égalité précédente à $f + g$ et $f - g$, comme le fait M. HURWITZ dans le mémoire déjà cité, on obtient par soustraction:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(u) g(u) du = 2a_0 c_0 + \sum_{n=1}^\infty (a_n c_n + b_n d_n)$$

les c_n, d_n étant les coefficients de la série de FOURIER de $g(u)$.[1]

4. Les méthodes précédentes conduisent également à un résultat intéressant relatif à la convergence des séries trigonométriques données par la loi de leurs coefficients et dont voici l'énoncé: *Si na_n et nb_n tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$, l'ensemble des points de divergence de la série:*

$$\sum_1^\infty (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

est de mesure nulle.

Il y aura donc des points de convergence dans tout intervalle. Considérons en effet la fonction harmonique:

$$F(r, \theta) = a_0 + (a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta) r + \ldots + (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n + \ldots.$$

[1] Voici une conséquence de la formule de PARSEVAL: soient a_n, b_n les constantes de FOURIER de $f(u)$; si la série $\sum n(a_n^2 + b_n^2)$ est convergente, $f(u)$ est développable en série de FOURIER sauf peut-être pour un ensemble de mesure nulle de valeurs de u; pratiquement cette proposition ne paraît pas bien utile.

Il est clair que la série $\sum_1^\infty (a_n^2 + b_n^2)$, est convergente puisque ses termes sont à partir d'un certain rang inférieurs à $\frac{1}{n^2}$. Il resulte alors de l'égalité de Parseval que l'intégrale:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} P^2(r, \theta) d\theta$$

reste bornée, quel que soit le nombre $r < 1$. Il en sera de même de:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |P(r, \theta)| d\theta.$$

Intégrons terme à terme la série qui représente $P(r, \theta)$ (il est un peu plus commode de supposer $a_0 = 0$, pour que l'intégration n'introduise pas de terme apériodique). Nous obtenons ainsi:

$$U(r, \theta) = \sum_1^\infty \left(\frac{a_n}{n} \sin n\theta - \frac{b_n}{n} \cos n\theta\right) r^n$$

et comme $\frac{a_n}{n}$ et $\frac{b_n}{n}$ sont plus petits à partir d'un certain rang que $\frac{1}{n^2}$, la série du second membre est absolument et uniformément convergente pour toutes les valeurs de θ, et pour toutes les valeurs de r comprises entre 0 et 1. Elle est donc continue à l'intérieur du cercle de rayon un et sur le cercle, et l'on peut mettre U sous la forme

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(u - \theta) + r^2} g(u) du,$$

$g(u)$ étant une fonction continue périodique.

Je dis en outre que $g(u)$ est à variation bornée entre $-\pi$ et $+\pi$. En effet soient $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_p$ des valeurs croissantes de l'argument; la somme:

$$|g(\theta_1) - g(\theta_2)| + |g(\theta_2) - g(\theta_3)| + \cdots + |g(\theta_{p-1}) - g(\theta_p)|$$

différera aussi peu que l'on veut, en prenant r suffisamment voisin de 1, de la suivante:

$$|U(r, \theta_1) - U(r, \theta_2)| + |U(r, \theta_2) - U(r, \theta_3)| + \cdots + |U(r, \theta_{p-1}) - U(r, \theta_p)|$$

laquelle est inférieure à: $\int_{\theta_1}^{\theta_2} |P(r, \theta)| d\theta$, puisque pour $r < 1$, la fonction $U(r, \theta)$ admet comme dérivée par rapport à θ, la fonction continue $P(r, \theta)$. Or nous savons que $\int_{-\pi}^{+\pi} |P(r, \theta)| d\theta$ reste bornée quand r tend vers 1; la fonction $g(u)$ est donc à variation totale bornée, donc, en vertu d'un théorème dû à M. LEBESGUE,[1] elle admet une dérivée finie pour un ensemble de valeurs de u dont le complémentaire est de mesure nulle. Or, si en un point u_0 la fonction continue $g(u)$ admet une dérivée $g'(u_0)$, nous savons que la fonction harmonique:

$$P(r, \theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} U(r, \theta)$$

tend vers une valeur bien déterminée quand le point (r, θ) tend vers le point $(1, u_0)$ suivant un chemin non tangent à la circonférence.

Pour en déduire la convergence de la série en ce point, il suffit d'avoir recours à la proposition suivante, qui est un cas particulier d'une proposition plus générale due à M. PRINGSHEIM:[2]

»Si la série

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

est convergente pour $x < 1$, et si en outre nc_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, il faut et il suffit pour que la série soit convergente pour $x = 1$, que la valeur de la série tende vers une limite finie quand x tend vers 1, par valeurs réelles plus petites que 1.»

Autrement dit le second théorème d'ABEL a ici une réciproque.

Voici comme on peut démontrer ce résultat. Si à partir d'un certain rang ν, on a

$$n|c_n| < \varepsilon_\nu$$

le reste de la série correspondant au terme de rang ν sera plus petit en module que:

$$\frac{\varepsilon_\nu}{\nu} \frac{x^{\nu+1}}{1 - x} < \frac{\varepsilon_\nu}{\nu(1 - x)}.$$

[1] *Leçons sur l'intégration et les fonctions primitives* (page 128).

[2] *Über das Verhalten einer Potenzreihe auf dem Konvergenzkreise* (Münchner Berichte, 38).

Donnons à x la valeur $1 - \frac{1}{\nu}$. Les termes qui viennent après le $\nu^{\text{ième}}$ auront une somme inférieure à ε_ν, et la somme de ceux qui précèdent:

$$c_0 + c_1\left(1 - \frac{1}{\nu}\right) + \ldots + c_\nu\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)^\nu$$

peut se mettre sous la forme

$$(c_0 + c_1 + \ldots + c_\nu) - \left(c_1 \frac{\delta_1}{\nu} + \frac{2c_2\delta_2}{\nu} + \ldots + \frac{\nu c_\nu \delta_\nu}{\nu}\right).$$

$\delta_1, \delta_2, \ldots$ désignant des nombres compris entre zéro et un. Le terme écrit dans la seconde parenthèse peut s'écrire:

$$\delta \frac{|c_1| + 2|c_2| + \ldots + \nu|c_\nu|}{\nu}$$

δ étant un nombre dont le module est plus petit que un. Or le produit νc_ν tendant vers zéro avec $\frac{1}{\nu}$, il en est de même de sa valeur moyenne, de sorte que, pour que $\varphi\left(1 - \frac{1}{\nu}\right)$ ait une limite, il est nécessaire que

$$c_0 + c_1 + \ldots + c_\nu$$

ait la même limite, ce qui établit la proposition.[1]

Soit donc θ une valeur de l'argument pour laquelle $g(\theta)$ admet une dérivée $g'(\theta)$. Nous aurons:

$$\lim_{r=1}\left[(a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta)r + \ldots + (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)r^n + \ldots\right] = g'(\theta)$$

donc en vertu du théorème de M. Pringsheim, la série

$$(a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta) + \ldots + (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) + \ldots$$

est convergente. C. Q. F. D.

Faisons quelques remarques au sujet de ce critère de convergence. D'abord il est clair que la convergence d'une série trigonométrique, en tout point, ne saurait résulter d'une condition de la forme:

$$\lim \varphi(n) a_n = 0, \qquad \lim \varphi(n) b_n = 0$$

[1] Nous avons pour plus de commodité donné à x une suite dénombrable de valeurs de la forme $1 - \frac{1}{\nu}$; il est facile de voir que cette restriction est insignifiante.

si la fonction positive $\varphi(n)$ est telle que la série $\sum \frac{1}{\varphi(n)}$ soit divergente, ce qui a lieu pour $\varphi(n) = n$. Il est d'ailleurs possible de former des séries trigonométriques pour lesquelles na_n et nb_n tendent vers zéro et qui ont une infinité dénombrable de points de divergence; tout au plus pourrait-on, peut-être, dans notre énoncé, remplacer les mots: ensemble de mesure nulle, par ensemble dénombrable.

En outre la convergence des séries trigonométriques semble dépendre beaucoup moins de la rapidité de la décroissance des coefficients, que de la régularité avec laquelle ils tendent vers zéro; je ne pense donc que l'on puisse donner de critères de convergence de même nature que celui que nous venons de donner et qui soit beaucoup plus compréhensif. Ce critère s'applique d'ailleurs à toutes les séries trigonométriques obtenues en intégrant terme à terme une série trigonométrique dont les coefficients tendent vers zéro. Voici une conséquence de cette remarque; nous savons que les coefficients d'une série de FOURIER tendent toujours vers zéro; en outre, M. LEBESGUE, dans son mémoire déjà cité, a montré, en généralisant un théorème de DU BOIS-REYMOND,[1] qu'une telle série est intégrable terme à terme c'est-à-dire que si

$$a_0 + (a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta) + \ldots + (a_n \sin n\theta + b_n \sin n\theta) + \ldots$$

est la série de FOURIER correspondant à $f(\theta)$, on a

$$\int_a^\theta f(\theta)\,d\theta = a_0(\theta - a) + \sum \frac{1}{n}(a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta - a_n \sin na + b_n \cos na).$$

Mais puisque la série $\sum \frac{1}{n}(a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta)$ a des points de convergence dans tout intervalle, on peut supposer que $\theta = a$ soit un tel point et écrire simplement:

$$\int_a^\theta f(\theta)\,d\theta = a_0\theta + C + \sum \frac{1}{n}(a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta);$$

par suite la série $\sum \frac{1}{n}(a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta)$ est toujours convergente, et

[1] Voir aussi l'article déjà cité de M. A. HURWITZ.

c'est à une constante près, la série de FOURIER de la fonction continue, périodique, à variation bornée:

$$\varphi(\theta) = \int_a^\theta [f(\theta) - a_0] d\theta \qquad \left(a_0 = \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) d\theta\right).$$

Elle est donc uniformément convergente.

Nous pouvons donc simplifier un peu le résultat précité de M. LEBESGUE: il est inutile en effet quand on intègre terme à terme une série de FOURIER, de retrancher une constante de l'intégrale indéfinie de chaque terme, pour assurer la convergence de la série obtenue.

Faisons encore remarquer que si l'on part d'une série trigonométrique pour laquelle $\sum(a_n^2 + b_n^2)$ est convergente (et alors en l'intégrant une fois on obtient une série trigonométrique uniformément convergente entre 0 et 2π) on peut affirmer que la fonction harmonique associée à la série proposée:

$$P(r, \theta) = \sum (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n$$

se comporte, au point de vue de l'indétermination sur le cercle de convergence, comme les fonctions bornées. C'est ce qui résulte de la démonstration précédente. On peut même ajouter que, sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle, la série

$$\sum (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

est sommable par le procédé de la moyenne arithmétique, ainsi que le prouve l'extension qu'a donné M. FEJER lui-même de son théorème, aux fonctions dérivées.[1]

Par exemple si l'on a:

$$a_n^2 + b_n^2 < \frac{1}{n \log n \,.\, \log_2 n \ldots (\log_k n)^{1+\alpha}} \qquad (\alpha > 0)$$

on se trouve en présence d'une série trigonométrique qui est sommable par ce procédé.

---

[1] Il résulte en effet des recherches de M. FEJER, que la fonction dérivée d'une fonction continue $f(u)$ dans l'ensemble des points où elle existe, est représentable par la série dérivée de la série de FOURIER de $f(u)$, sommée par une double application de la moyenne arithmétique.

Nous avons vu que si $\lim na_n = 0$, $\lim nb_n = 0$, la série:

(I) $f(\theta) = a_0 + (a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta) + \ldots + (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) + \ldots$

est convergente pour toutes les valeurs de θ pour lesquelles la fonction:

(II) $$g(\theta) = a_0\theta + \sum \frac{a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta}{n}$$

admet une dérivée $g'(\theta)$, et a précisément pour somme $g'(\theta)$.

Nous pouvons démontrer que réciproquement, si la série (I) est convergente elle est égale à la dérivée de la série (II).

Pour cela il suffit de modifier légèrement la méthode qu'emploie RIEMANN[1] pour démontrer ses deux premières propositions générales sur la représentation d'une fonction par une série trigonométrique.

On a d'abord, en vertu du théorème 2 de RIEMANN:

$$\lim_{\alpha=0} \frac{g(\theta + \alpha) + g(\theta - \alpha) - 2g(\theta)}{\alpha} = 0.$$

Il suffit donc de démontrer que si la série (I) converge et a pour somme $f(\theta)$, on a:

$$\lim_{\alpha=0} \frac{g(\theta + \alpha) - g(\theta - \alpha)}{2\alpha} = f(\theta).$$

Or, si l'on pose:

$$A_n = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta$$

on trouve:

$$\frac{g(\theta + \alpha) - g(\theta - \alpha)}{2\alpha} = A_0 + A_1\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right) + \ldots + A_n\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right) + \ldots$$

Soit s le plus grand entier inférieur à $\frac{\pi}{\alpha}$. Considérons la série

$$\sum_{s=1}^{\infty} A_n\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right).$$

On aura

$$n|A_n| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit, pour $n > p$.

[1] *Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (§ 8, théorèmes 1 et 2).

Si donc s est supérieur à p, on aura

$$\left|\sum_{s+1}^{\infty} A_n\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{\alpha}\sum_{s+1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon}{s\alpha} < \frac{\varepsilon}{\pi-\alpha} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\text{si } \alpha < 1).$$

Considérons ensuite les deux sommes:

$$A_0 + \sum_{1}^{p} A_n\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{p+1}^{s+1} A_n\left(\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}\right).$$

p restant fixe, la première a pour limite quand α tend vers zéro:

$$A_0 + A_1 + \ldots + A_p.$$

Quant à la seconde, on en a facilement une limite supérieure en appliquant le lemme d'ABEL; en effet $n\alpha$ restant compris entre o et π, $\frac{\sin n\alpha}{n\alpha}$ va en décroissant quand n augmente et reste positif et inférieur à 1; la série

$$A_0 + A_1 + \ldots + A_n + \ldots$$

étant supposée convergente, on peut supposer que p ait été choisi assez grand pour que:

$$A_{p+1} + A_{p+2} + \ldots + A_{p+q}$$

soit plus petit en module que ε, quel que soit l'entier q. Cette seconde partie sera alors inférieure à ε. On aura donc:

$$\lim \frac{g(\theta+\alpha) - g(\theta-\alpha)}{2\alpha} = f(\theta),$$

$$\lim \frac{g(\theta+\alpha) + g(\theta-\alpha) - 2g(\theta)}{\alpha} = 0$$

d'où l'on conclut:

$$\lim \frac{g(\theta \pm \alpha) - g(\theta)}{\pm \alpha} = f(\theta).$$

Le théorème est démontré:

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que la série

$$\sum (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

où na_n et nb_n tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$ soit convergente pour une valeur dé-

terminée de θ, est que la fonction $g(\theta)$ obtenue en intégrant terme à terme la série proposée ait une dérivée $g'(\theta)$, qui est alors égale à la somme de la série donnée.

En particulier, si $\sum(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$ est convergente en tous les points d'un intervalle, elle y représente une fonction dérivée c'est-à-dire une fonction qui ne peut passer d'une valeur à une autre sans prendre toutes les valeurs intermédiaires.

5. En combinant, comme nous l'avons fait plus haut, les résultats connus concernant l'intégrale de Poisson, avec le théorème de M. Pringsheim, on peut aussi retrouver certains résultats classiques concernant la série de Fourier. En effet, si on considère l'intégrale de Poisson relative à une fonction continue $f(\theta)$ et supposée mise sous la forme

$$P(r, \theta) = \sum_0^\infty (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) r^n$$

on sait que $P(r, \theta)$ tend uniformément vers $f(\theta)$ quand r tend vers un; si donc on a:

$$\lim n a_n = 0, \qquad \lim n b_n = 0$$

on en déduira la convergence uniforme vers $f(\theta)$, de la série de Fourier $\sum(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$. Si en particulier $f(\theta)$ admet une dérivée bornée $f'(\theta)$, on peut appliquer l'intégration par parties dans les formules:

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \qquad b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta$$

ce qui donne:

$$n a_n = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f'(\theta) \sin n\theta d\theta, \qquad n b_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f'(\theta) \cos n\theta d\theta;$$

or ces dernières intégrales tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$.[1]

Nous voyons en outre que la fonction harmonique conjuguée

$$Q(r, \theta) = \sum (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta) r^n$$

[1] Lebesgue, *Mémoire sur les séries trigonométriques*, page 471, ou ce mémoire page 351.

tendra aussi uniformément vers une limite quand r tendra vers 1, d'après ce qu'on a vu dans le premier chapitre. Par suite la série

$$\sum (a_n \sin n\theta - b_n \cos n\theta)$$

sera, dans les mêmes conditions, uniformément convergente.

Il n'y a rien à changer si $f(\theta)$ est à nombres dérivées bornés.[1]

6. Nous allons maintenant montrer comment l'on peut rattacher le second théorème d'Abel sur les séries entières au théorème de Riemann sur les séries trigonométriques (théorème 1, § 8 du mémoire de Riemann). Considérons la série trigonométrique $\sum (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$, où a_n et b_n tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$ et qu'on suppose convergente pour une certaine valeur de θ, et égale à $f(\theta)$. Si l'on pose avec Riemann:

$$F(\theta) = \sum_1^\infty -\frac{A_n}{n^2} \quad \text{(on suppose } a_0 = 0 \text{ pour simplifier)}$$

on a:

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F(\theta+\alpha) + F(\theta-\alpha) - 2F(\theta)}{\alpha^2} = f(\theta).$$

Si $U(r, \theta)$ désigne la fonction harmonique associée à $F(\theta)$:

$$U(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(u-\theta) + r^2} F(u)\,du,$$

et $P(r, \theta)$ la fonction harmonique associée à la série proposée, on a:

$$P(r, \theta) = \frac{\partial^2 U(r, \theta)}{\partial \theta^2}.$$

---

[1] Au sujet de la convergence uniforme des séries de Fourier, on trouvera des propositions intéressantes dans le livre récemment paru de M. Lebesgue, *Leçons sur les séries trigonométriques*, (Paris, Gauthier-Villars, 1906).

De ces diverses égalités, on déduit, en vertu d'une étude qui a été faite dans la première partie:

$$\lim_{r=1} P(r, \theta) = f(\theta),$$

ce qui est précisément le théorème d'ABEL.

Mais nous pouvons aller plus loin: supposons que la série proposée soit convergente en tous les points d'un intervalle I; on a alors $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = 0$ d'après un théorème de CANTOR. En outre la série aura des points de continuité formant un ensemble dense dans I, d'après le théorème de M. BAIRE, soit θ_0 un tel point. Il résulte alors de ce que nous avons établi dans la première partie, que l'on aura:

$$\lim P(r, \theta) = f(\theta_0)$$

quand le point (r, θ) se rapproche indéfiniment du point $(1, \theta_0)$ suivant un chemin quelconque tangent ou non à la circonférence.

Ainsi, si une série de Taylor (ou la partie réelle d'une série de Taylor) est convergente en tous les points d'un arc S du cercle de convergence il existe dans tout intervalle de S, des points où la série prend une valeur bien déterminée suivant tous les chemins qui y aboutissent.

7. Ceci nous amène à parler des conditions de convergence d'une série de TAYLOR sur son cercle de convergence. Nous avons obtenu à ce sujet une proposition qui paraît devoir être utile et dont voici l'énoncé:

Si la série de Taylor

$$\varphi(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_n z^n + \dots$$

a un rayon de convergence égal à l'unité et si c_n tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, la série est convergente en tout point régulier de son cercle de convergence. Ce théorème se déduit facilement d'un théorème de RIEMANN (§ 9, théorème III, du mémoire cité), et dont voici l'énoncé (en conservant les notations du paragraphe précédent):

«La condition nécessaire et suffisante pour que la série:

$$A_1 + A_2 + \dots + A_n + \dots$$

soit convergente pour une valeur θ de l'argument est que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_b^c F(t)\frac{d^2}{dt^2}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\theta-t)}{\sin\frac{(\theta-t)}{2}}\rho(t)dt$$

tende vers une limite finie quand n augmente indéfiniment, en désignant par b et c deux nombres quelconques comprenant la valeur θ, et $\rho(t)$ une fonction indéterminée de t assujettie aux conditions suivantes: $\rho(t)$ et $\rho'(t)$ ont la valeur zéro pour $t = b$, $t = c$ et sont continues entre ces limites; $\rho''(t)$ n'a qu'un nombre fini de maxima et de minima; en outre pour $t = \theta$, on a $\rho(t) = 1$, $\rho'(t) = 0$, $\rho''(t) = 0$ et $\rho'''(t)$, $\rho^{\text{IV}}(t)$ sont finies et continues.»[1]

Il en résulte, comme le fait remarquer RIEMANN que la convergence de la série en un point θ, ne dépend que des propriétés de la fonction $F(t)$ dans un intervalle (b, c) aussi petit qu'on le veut entourant ce point.

Supposons en particulier que dans (b, c), $F(t)$ admette des dérivées bornées et continues d'ordre aussi élevé que nous voudrons. Nous pourrons alors transformer l'intégrale précédente au moyen d'intégrations par parties. En posant:

$$M = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(\theta-t)}{\sin\frac{(\theta-t)}{2}}$$

et tenant compte des conditions imposées à $\rho(t)$, nous aurons ainsi:

$$\int_b^c F(t)\rho(t)\frac{d^2M}{dt^2}dt = -\int_b^c \frac{dM}{dt}\frac{d}{dt}(F\rho)dt$$

$$= -\int_b^c \frac{dM}{dt}(F\rho' + \rho F')dt = \int_b^c (F\rho'' + 2\rho'F' + \rho F'')Mdt.$$

[1] Nous reproduisons ici l'énoncé de RIEMANN; parmi les conditions énoncées par lui relativement à la fonction $\rho(t)$, il y en a qui sont superflues.

Or la fonction de t: $F\rho'' + 2\rho' F' + \rho F''$, est une fonction, intégrable et bornée qui pour $t = \theta$ prend la valeur $F''(\theta)$, et admet une dérivée finie. Il résulte alors des études classiques sur l'intégrale de DIRICHLET, que l'intégrale considérée tend vers une limite finie: $F''(\theta)$, quand n augmente indéfiniment et que ΣA_n est convergente au point considéré.

Cela étant, si dans

$$\text{(I)} \qquad \varphi(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots \quad \text{(on suppose encore } c_0 = 0\text{)}$$

on pose $z = e^{i\theta}$, on obtient, en séparant le réel de l'imaginaire, deux séries trigonométriques, et les fonctions de RIEMANN $F(\theta)$, $F_1(\theta)$ correspondantes, s'obtiennent en posant $z = e^{i\theta}$, dans la série:

$$\text{(II)} \qquad \psi(z) = -\frac{c_1 z}{1^2} - \frac{c_2 z^2}{2^2} - \dots - \frac{c_n z^n}{n^2} - \dots$$

qui est absolument convergente sur son cercle de convergence.

Or les fonctions (I) et (II) ont les mêmes singularités, comme il résulte, par exemple, de l'expression de $\psi(z)$ au moyen de $\varphi(z)$ à l'aide de quadratures. Si donc en un point d'argument θ du cercle de convergence, la fonction (I) est régulière, il en sera de même de la fonction (II) et par suite $F(t)$, $F_1(t)$ seront analytiques, dans un intervalle fini (b, c) comprenant le point θ; elles y auront donc des dérivées bornées d'ordre aussi élevé qu'on le voudra. Par suite, d'après ce qu'on vient de voir, la série

$$c_0 + c_1 e^{i\theta} + \dots + c_n e^{ni\theta} + \dots$$

sera convergente.

Si l'on suppose maintenant, non plus que les coefficients tendent vers zéro, mais qu'ils restent finis, il résulte du raisonnement de RIEMANN que la différence entre $A_0 + A_1 + \dots + A_n$ et l'intégrale considérée par lui reste bornée quand n croît indéfiniment; *il en résulte qu'en tout point régulier du cercle de convergence, la série doit osciller entre des limites finies.*

Ces théorèmes permettent dans un grand nombre de cas de mettre en évidence certains points singuliers d'une série de TAYLOR sur son cercle de convergence; on peut d'ailleurs en augmenter le champ d'application en utilisant le principe de multiplication des singularités de M. HADAMARD: si en multipliant les coefficients de la série donnée par ceux d'une série connue admettant par exemple le point $z = 1$ comme point singulier unique,

on obtient une nouvelle série dont les coefficients tendent vers zéro, sans former une série absolument convergente, tous les points de divergence que l'on pourra mettre en évidence sur le cercle de convergence, seront des points singuliers pour la série proposée.

Exemples. I. Considérons la série suivante, étudiée par M. HADAMARD dans sa thèse: [1]

$$\sum_1^\infty \sin(\log n) z^n.$$

Je dis que le point $z = 1$ est un point singulier. Il suffit de remarquer que si l'on donne à n les valeurs entières comprises entre:

$$e^{2k\pi+\alpha} \quad \text{et} \quad e^{2k\pi-\alpha} \qquad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

on obtient, dans la série $\sum_1^\infty \sin(\log n)$, une suite de termes consécutifs supérieurs à $\sin\alpha$, et dont le nombre croît indéfiniment avec k; il en résulte que la somme de cette série n'oscille pas entre des limites finies, et par suite le point $z = 1$ est singulier (c'est d'ailleurs le seul point singulier, comme il résulte de l'expression de la fonction au moyen d'une intégrale définie).

II. Considérons la série: $\Sigma\mu(n)z^n$, où $\mu(n)$ désigne la fonction arithmétique égale à zéro, quand n contient des diviseurs carrés, et dans les autres cas à $(-1)^h$, h étant le nombre des facteurs premiers de n. Je dis que le point $z = 1$ est singulier. En effet $\mu(1) + \mu(2) + \ldots + \mu(n)$ n'oscille pas entre des limites finies, car s'il en était ainsi la série de DIRICHLET:

$$\sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}$$

serait uniformément convergente pour les valeurs de s dont la partie réelle serait supérieure à un nombre positif quelconque, on en déduirait que la fonction $\zeta(s)$ n'a pas de zéro imaginaire; or elle en a une infinité.

Il est inutile de multiplier ces exemples: tant qu'il ne s'agit que de démontrer la divergence *en un point*, c'est à dire la divergence d'une série

[1] *Essai sur les fonctions données par leur développement de Taylor* (Journal de mathématiques pures et appliques, 4[e] série, tome 8, p. 163).

purement numérique, il n'y a aucune règle générale à donner. Ce qui est plus intéressant c'est de donner des exemples de séries trigonométriques, dont les coefficients tendent vers zéro et qui aient des points de divergence dans tout intervalle: on aura, en même temps, une série de TAYLOR admettant son cercle de convergence comme coupure. Nous parlerons un peu de cette question à la fin de ce mémoire.

8. Pour terminer cette deuxième partie, nous allons montrer que *l'on peut trouver des fonctions analytiques uniformes ayant pour singularité unique une coupure fermée, par exemple un cercle et possédant une infinité non dénombrable de zéros sur la coupure.*[1] En effet construisons comme il a été expliqué dans la première partie une fonction harmonique restant positive dans C, régulière dans ce cercle, et prenant la valeur $+\infty$ aux points d'un ensemble parfait de mesure nulle E, de la circonférence. On peut supposer que dans tout intervalle intérieur à l'un des intervalles contigus à E la fonction $f(u)$ (page 344) admette une dérivée bornée, sans être analytique. Dans ces conditions la fonction harmonique $Q(r, \theta)$ conjuguée de la fonction harmonique considérée $P(r, \theta)$, prendra des valeurs bien déterminées sur le cercle, sauf aux points de E. La fonction analytique $\varphi(z) = P + iQ$, est donc régulière dans C, n'y devient jamais nulle, puisque P reste positif, et prend une valeur infinie aux points de E. Si donc on considère la fonction $\frac{1}{\varphi(z)}$ elle sera holomorphe à l'intérieur du cercle qu'elle admettra comme coupure, prendra sur le cercle une suite de valeurs bien déterminées et continues et en particulier la valeur zéro en tous les points de l'ensemble non dénombrable E.

Il serait d'ailleurs facile d'obtenir une fonction prenant la valeur zéro en tous les points d'un ensemble non dénombrable et partout dense sur une coupure; il suffira d'appliquer à l'exemple précédent le principe de condensation des singularités; considérons une infinité dénombrable d'ensembles analogues à E: $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, de telle sorte que l'ensemble $E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$ soit partout dense et construisons les fonctions harmoniques positives $P_1, P_2, \ldots, P_n, \ldots$ correspondantes; choisissons

[1] On trouvera d'intéressantes remarques au sujet de cette question dans la thèse de M^r^ ZORETTI: *Sur les fonctions analytiques uniformes etc.*, (Journal de mathématiques, 1900).

ensuite les constantes positives $c_0, c_1, c_2, \ldots$ de telle sorte que la série $c_0P_0 + c_1P_1 + \ldots + c_nP_n + \ldots$ soit convergente pour le centre du cercle; elle représentera alors une fonction harmonique regulière dans C et devenant infinie en tous les points de l'ensemble $(E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots)$. En raisonnant comme plus haut, on obtiendra une fonction uniforme définie dans C et prenant la valeur zéro en tous les points de l'ensemble considéré.

La forme de la coupure ne joue ici aucun rôle essentiel. Les intégrales définies étudiées par HERMITE et STIELTJES, par exemple la suivante:

$$\int_0^\infty \frac{u+z}{\varphi(u)} du$$

permettraient d'obtenir des fonctions jouissant des mêmes propriétés, la coupure étant cette fois une demi-droite, ou un segment de droite.

Mais l'ensemble des zéros que l'on obtient ainsi est toujours de mesure nulle et il est aisé de voir que la méthode que nous avons employée ne permet pas d'aller plus loin; à vrai dire il est probable qu'une fonction uniforme ne peut prendre la valeur zéro qu'en un ensemble de mesure nulle de points d'une coupure isolée, mais il paraît bien difficile de donner de ce fait une démonstration générale. On pourrait même se demander s'il ne serait pas possible d'obtenir une fonction analytique définie par exemple par une série de TAYLOR à rayon de convergence fini, et non continuable, qui prenne la valeur zéro en tous les points du cercle de convergence *suivant les rayons* qui y aboutissent. Nous pouvons seulement affirmer que si une telle fonction existe elle n'est pas bornée à l'intérieur du cercle et même qu'elle peut s'approcher autant que l'on veut de toute valeur donnée à l'avance.

D'une façon un peu plus précise supposons que la série de TAYLOR $f(z)$ converge à l'intérieur du cercle C de rayon un, et y reste bornée; je dis que si $f(z)$ n'est pas identiquement nulle, l'ensemble des valeurs de θ pour lesquelles $f(re^{i\theta})$ ne tend pas vers zéro, r tendant vers un, est de mesure *non nulle* dans tout intervalle. En effet, si l'on avait

$$\lim_{r=1} f(re^{i\theta}) = 0, \quad \text{pour } \theta_0 \leq \theta < \theta_0 + \alpha$$

à un ensemble de mesure nulle près, en choisissant un entier n tel que $n\alpha > 2\pi$, on en déduirait que la fonction

$$F(z) = f(z)f(ze^{ia})f(ze^{2ia})\dots f(ze^{nia})$$

prendrait la valeur zéro en tous les points de la circonférence, suivant les rayons, sauf peut être aux points d'un ensemble de mesure nulle. $F(z)$ étant bornée à l'intérieur de C, il s'ensuit que $F(z)$ et par suite $f(z)$ doivent être identiquement nulles.

Il existe donc dans tout intervalle, sur la circonférence, des points où $f(z)$ prend, suivant les chemins non tangents, une valeur déterminée, *différente de zéro ou d'une constante donnée* A, ou même de p constantes données arbitrairement, comme on le voit, en considérant le produit:

$$\Phi(z) = [f(z) - A_1][f(z) - A_2]\dots[f(z) - A_p].$$

La même propriété a lieu pour une fonction qui devient bornée par une transformation homographique.

Signalons également la proposition suivante, qui découle aisément de ce qui a été dit au § 6:

Si la série $\Sigma(a_n + ib_n)e^{ni\varphi}$ *est convergente et a pour somme zéro dans un intervalle aussi petit qu'on le veut, tous les coefficients* a_n *et* b_n *sont nuls.*

Note.

Nous allons donner maintenant quelques indications sur le rôle que peut jouer la question de l'approximation des nombres incommensurables dans l'étude de certaines particularités que peuvent présenter les séries trigonométriques.

Soit x un nombre incommensurable, $q_1 q_2 \dots q_n \dots$ une suite d'entiers positifs croissants et considérons les valeurs approchées par excès et par défaut de x à $\frac{1}{q_1}, \frac{1}{q_2}, \dots, \frac{1}{q_n}$ près. Je dis que si l'on a constamment $q_{n+1} \geqq 2q_n$ les valeurs par excès ne croissent pas et les valeurs par défaut ne décroissent pas. En effet le segment $\left(\frac{p_n}{q_n}, \frac{p_n + 1}{q_n}\right)$ a pour longueur $\frac{1}{q_n} \geqq \frac{2}{q_{n+1}}$; il en résulte qu'il renferme en général au moins deux points

dont les abscisses sont de la forme $\frac{h}{q_{n+1}}$. Si donc $\frac{p_n}{q_n}$ est la valeur approchée de x à $\frac{1}{q_n}$ près par défaut, on aura:

$$\frac{p_n}{q_n} < \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} < x < \frac{p_{n+1}+1}{q_{n+1}} < \frac{p_n+1}{q_n}.$$

(Dans le cas où $q_{n+1} = 2q_n$, l'une des deux inégalités extrêmes pourrait devenir une égalité.)

Supposons maintenant que l'on ait:

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} > k > 2$$

je dis que l'on pourra trouver dans tout intervalle des nombres x en infinité non dénombrable, tels que l'on ait à partir d'une certaine valeur de n:

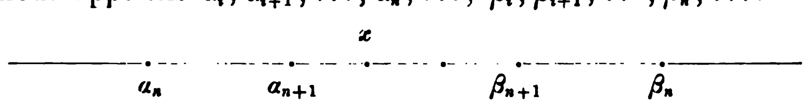
$$(q_n x) > f,$$

f désignant un nombre positif fixe et $(q_n x)$ la valeur absolue de la différence entre $q_n x$ et l'entier le plus voisin.

En effet, pour i suffisamment grand l'intervalle $\left(\frac{p_i}{q_i}, \frac{p_i+1}{q_i}\right)$ sera compris à l'intérieur d'un intervalle donné AB, en choisissant p_i convenablement. Considérons maintenant l'intervalle $\left(\frac{p_{i+1}}{q_{i+1}}, \frac{p_{i+1}+1}{q_{i+1}}\right)$ compris à l'intérieur de l'intervalle de rang i.

S'il y a plusieurs intervalles de rang $i+1$ entre lesquels nous avons le choix, nous prendrons celui qui comprend le milieu de l'intervalle de rang i.

En continuant ainsi nous obtiendrons un nombre x défini par la suite de ses valeurs approchées à $\frac{1}{q_i}\,\frac{1}{q_{i+1}}\ldots\frac{1}{q_n}\ldots$ près par défaut et par excès et que nous appelons $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n, \ldots;\ \beta_i, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_n, \ldots$.



Or d'après la façon dont les α et β ont été choisis, l'un et l'autre des intervalles $\alpha_n\alpha_{n+1}$, $\beta_n\beta_{n+1}$ sont plus grands que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k}\right)\cdot\frac{1}{q_n}.$$

On aura par suite, puisque x est compris entre α_{n+1} et β_{n+1}:

$$(q_n x) > \frac{k-2}{2k} = f,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si maintenant le rapport $\frac{q_{n+1}}{q_n}$ augmente indéfiniment avec n on verra aisément qu'il existe dans tout intervalle des nombres x tels que $(q_n x)$ tende vers telle limite que l'on voudra (comprise entre 0 et $\frac{1}{2}$).

Nous déduisons de là une démonstration simple du théorème de Cantor d'après lequel une série trigonométrique dont les coefficients ne tendent pas vers zéro a des points de divergence dans tout intervalle. On voit aisément qu'il suffit de considérer une série de sinus:

$$\Sigma c_n \sin(n\pi x).$$

S'il existe en effet une infinité de valeurs de n: $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ pour lesquelles $|c_n|$ reste supérieur à un nombre positif a, on peut supposer, en négligeant au besoin certains des q_i, que l'on ait constamment

$$\frac{q_{i+1}}{q_i} > k > 2$$

et comme on peut alors choisir n, dans tout intervalle, de telle façon que $\sin(q_i \pi x)$ reste supérieur en module à $\sin(\pi f)$ $\left(0 < f < \frac{1}{2}\right)$, les termes correspondants de la série ne tendent pas vers zéro et celle-ci est divergente.

On obtient aussi très aisément les propositions suivantes que nous nous contentons d'énoncer.

Considérons la série $\Sigma A_n \sin(a_n x)$ dans laquelle $\frac{a_{n+1}}{a_n} > k > 2$: si la série ΣA_n n'est pas absolument convergente, cette série aura des points de divergence dans tout intervalle.

Si rapidement croissantes que soient les constantes $|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_n|, \ldots$ on pourra toujours trouver des entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ croissant assez vite pour que la série $\Sigma A_n {\sin \atop \cos}(a_n x)$ ait des points de convergence dans tout intervalle.

On voit qu'il est facile de former des séries trigonométriques dont les coefficients tendent vers zéro et qui ont une infinité non dénombrable

et dense de points de divergence; d'ailleurs on ne détruira pas cette propriété en ajoutant à une telle série, une autre série partout convergente par exemple $\Sigma a_n \sin nx$, où les a_n sont positifs, décroissants et tendent vers zéro — on déduira de là différentes séries de TAYLOR ayant leur cercle de convergence comme coupure.

Indiquons maintenant le rôle que jouent dans l'étude de la convergence des séries trigonométriques les points de convergence absolue. Soit x_0 un point de convergence absolue de la série

$$f(x) = \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

On aura:

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0) = -4 \sum A_n^0 \sin^2 \frac{nh}{2}$$

en posant

$$A_n^0 = a_n \cos nx_0 + b_n \sin nx_0.$$

La série du second membre est donc absolument et uniformément convergente puisque la série $\sum |A_n^0|$ est convergente; elle représente donc une fonction continue de h. On en déduit que si la série est convergente, ou continue au point $(x_0 + h)$, elle est convergente ou continue au point $(x_0 - h)$, c'est à dire que les points de continuité, de convergence, de divergence, de convergence absolue sont deux à deux symétriques par rapport aux points de convergence absolue.

Si la série a deux points de convergence absolue dont la différence des arguments est incommensurable à π, on en déduira l'existence de tels points dans tout intervalle.

Voici dans le même ordre d'idées une question qui me paraît intéressante et dont je n'ai pu trouver de solution: considérons une série trigonométrique dont les coefficients tendent vers zéro; nous avons vu qu'elle peut avoir des points de divergence dans tout intervalle, mais l'ensemble des points pour lesquels nous pouvons démontrer la divergence, quand elle a lieu, est toujours de mesure nulle. Peut-on alors donner un exemple de série trigonométrique, à coefficients tendant vers zéro, et qui soit divergente pour toutes les valeurs de l'argument ou seulement pour un ensemble de mesure non nulle de valeurs de l'argument? Il semble que cela puisse avoir lieu par exemple pour des séries présentant un grand nombre de lacunes, mais nous n'en avons aucune preuve rigoureuse.

Nous allons encore, en terminant ces généralités sur la convergence des séries trigonométriques démontrer une proposition qui paraît avoir été jusqu'ici admise sans démonstration rigoureuse: *si la série*

$$\sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

est absolument convergente en tous les points d'un intervalle, les deux séries Σa_n *et* Σb_n *sont absolument convergentes.*

En effet s'il en est ainsi la série proposée sera absolument convergente pour toutes les valeurs de x; en faisant $x = 0$ on obtient la série Σa_n qui doit être, d'après l'hypothèse, absolument convergente. Reste à démontrer que si la série $\Sigma b_n \sin nx$ est absolument convergente pour toutes les valeurs de x, la série $\sum |b_n|$ est convergente.

Considérons la fonction

$$\varphi(x) = \sum_1^\infty |b_n| . |\sin nx|$$

qui a en chaque point une valeur finie; cette fonction, limite de fonctions continues, étant d'après le théorème de M. Baire ponctuellement discontinue, sera bornée dans certains intervalles tels que (α, β). Soit $S_n(x)$ la somme des n premiers termes de la série qui définit $\varphi(x)$. On a:

$$S_n(x) < \varphi(x),$$

$$0 < \int_\alpha^\beta S_n(x)dx < \int_\alpha^\beta \varphi(x)dx \quad \text{(quantité finie).}$$

Or, on vérifie aisément que l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta |\sin nx|\, dx$$

a une valeur qui tend vers $2(\beta - \alpha)$ pour n infiniment grand, qui reste donc supérieure à un nombre positif fixe.

Il résulte alors de la dernière inégalité que nous avons écrite que $|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_n|$ doit rester bornée quand n croît indéfiniment, c'est à dire que la série Σb_n est absolument convergente.

Nous concluons de là que si les séries Σa_n, Σb_n ne sont pas toutes les deux absolument convergentes, il y a dans tout intervalle des valeurs de x pour lesquelles la série $\sum | a_n \cos nx + b_n \sin nx |$ est divergente.

Comme application, faisons voir que si l'on a une série trigonométrique:

$$A_0 + A_1 + \dots + A_n + \dots \qquad (A_n = a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

telle que $\lim a_n = 0$, $\lim b_n = 0$ pour n infini, la série $\sum \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ étant divergente, on pourra toujours en changeant le signe de certains des A_n, obtenir une nouvelle série qui ait des points de divergence dans tout intervalle.

Soient en effet $x_1, x_2, \dots, x_p, \dots$ une infinité dénombrable et partout dense d'arguments compris entre 0 et 2π et telle qu'il y en ait une infinité qui soient égaux à l'un quelconque d'entre eux. D'après ce qui précède je puis toujours supposer ces arguments tels que pour $x = x_1, x_2, \dots$ la série $\sum |A_n|$ soit divergente. On peut alors déterminer une suite d'entiers croissants $n_1, n_2, n_3, \dots$ tels que l'on ait:

$$|A_0| + |A_1(x_1)| + |A_2(x_1)| + \dots + |A_{n_1}(x_1)| > P,$$
$$|A_{n_1+1}(x_2)| + \dots\dots\dots\dots + |A_{n_2}(x_2)| > P$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

P désignant un nombre positif quelconque; pour

$$n_{p-1} + 1 \leqq n \leqq n_p$$

donnons à $\varepsilon_n = \pm 1$, le signe de $A_n(x_p)$. Dans ces conditions, la série:

$$\varepsilon_0 A_0 + \varepsilon_1 A_1 + \dots + \varepsilon_n A_n + \dots$$

sera divergente pour $x = x_1$, $x = x_2$, ... Il en résulte (page 389) que la série de TAYLOR:

$$\sum (a_n - i b_n) \varepsilon_n z^n$$

aura son cercle de convergence pour coupure.

Ainsi on peut toujours en multipliant par -1 certains coefficients d'une série de TAYLOR obtenir une nouvelle série qui admette son cercle de convergence comme coupure, au moins lorsque les coefficients satisfont aux conditions énoncées au haut de cette page; il est infiniment probable que cela a lieu dans tous les cas.

BIBLIOGRAPHIE.

Félix Alcan.

Paris 1905.

COUTURAT, L., Les principes des mathématiques, avec un appendice sur la philosophie des mathématiques de Kant. (Bibliothèque de philosophie contemporaine.)

Les principes de la logique. L'idée de nombre. L'idée d'ordre. Le continu. L'idée de grandeur. La géométrie. Sur la théorie des ensembles. Sur la notion de groupe. — VIII + 310 p. 8. Fr. 5 —.

Cambridge University Press.

1906.

YOUNG, W. H., & YOUNG, G. CH., The theory of sets of points.

Rational and irrational numbers. Representation of numbers on the straight line. The descriptive theory of linear sets of points. Potency, and the generalised idea of a cardinal number. Content. Order. Cantor's numbers. Preliminary notions of plane sets. Regions and sets of regions. Curves. Potency of plane sets. Plane content and area. Length and linear content. — XII + 316 p. 8. Sh.

C. F. Clay.

1905—06.

BLYTHE, W. H., On models of cubic surfaces. — VIII + 106 p. 8. Sh. 4—.

HARDY, G. H., The integration of functions of a single variable. (Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics. N° 2.) — VIII + 53 p. 8. Sh. 2, 6 d.

HUDSON, R. W. H. T., Kummer's quartic surface.

Kummer's configuration. The quartic surface. The orthogonal matrix of linear forms. Line geometry. The quadratic complex and congruence. Plücker's complex surface. Sets of nodes. Equations of K:s surface. Special forms of K:s surface. The wave surface. Reality and topology. Geom. of four dimen-

sions. Algebraic curves on the surface. Curves of different orders. Weddle's surface. Theta functions. Appl. of Abel's theorem. Singular Kummer surfaces. — XI+222 p. 8. Sh. 8— (cloth.).

LEATHEM, J. G., Volume and surface integrals used in physics. (Cambridge tracts in mathematics and mathematical physics. N° 1.) — 47 p. 8. Sh. 2, 6 d.

MACAULAY, F. S., Geometrical conics. Second edition. — X+300 p. 8.

Carnegie Inst. of Washington.

1904—06.

HILL, GEORGE WILLIAM, The collected mathematical works.

Vol. 1. (Carnegie Institution of Washington. Publication N° 9.).

Introduction by H. Poincaré. — XVIII+363 p. 4.

Vol. 2. (Carnegie Institution of Washington.) — 339 p. 4.

Vol. 3. (Carnegie Institution of Washington. Publication N° 9.). — 577 p. 4.

NEWCOMB, S., On the position of the galactic and other principal planes toward which the stars tend to crowd. (Carnegie Institution of Washington. Publication N° 10.) — 32 p. 4.

Wilh. Engelmann.

Leipzig 1903.

FRISCHAUF, J., Grundriss der theoretischen Astronomie und der Geschichte der Planetentheorien. 2:e, vermehrte Aufl.

Beziehungen zwischen den die Bewegungen der Himmelskörper um die Sonne bestimmenden Grössen. Bahnbestimmung der Planeten und Kometen. Geschichte der Planetentheorien. — XV+199 p. 8. M. 5—; geb. M. 6—.

Gauthier-Villars.

Paris 1904–06.

Annuaire pour l'an 1906, publ. par le Bureau des Longitudes. Avec une notice de G. BIGOURDAN: Les éclipses de soleil. Instructions sommaires sur les observations que l'on peut faire pendant ces éclipses. Fr. 1,50.

ARNAUDEAU, A., Tables des intérêts composés. Annuités et amortissements pour des taux variant de dixièmes en dixièmes et des époques variant de 100 à 400, suivant les taux. — XI+125 p. 4. Fr. 10—.

BACHET, C.-G., Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres. 4e éd., revue et simplifiée. — 161 p. Fr. 8.

COUTURAT, L., L'algèbre de la logique (Scientia. Sér. phys.-math. N° 24). — 100 p. 8. Fr. 2—.

DARBOUX, G., Étude sur le développement des méthodes géométriques, lue le 24 septembre 1904 au Congrès des sciences et des arts à Saint-Louis. — 34 p. 8. Fr. 1,50.

FASSBINDER, CH., Théorie et pratique des approximations numériques. — VI+90 p. 8. Fr. 3—.

GUICHARD, CLAUDE, Sur les systèmes triplement indéterminés et sur les systèmes triple-orthogonaux (Scientia. Sér. phys.-math. N° 25). — 95 p. 8.

GOURSAT, E., Cours d'analyse mathématique. T. 2, fasc. 2.

Éq. différentielles. Méthodes élém. d'intégration. Théorèmes d'existence. Éq. diff. linéaires. Éq. diff. non lin. Éq. aux dérivées partielles. Éléments du calcul des variations. — pp. 305—640. 8. Fr. 20— (prix du t. 2 complet).

HERMITE, CHARLES, Oeuvres publ. sous les auspices de l'Académie des sciences par Émile Picard. T. 1. (Avec portrait.) — XL+498 p. 8. Fr. 18—.

HERMITE et STIELTJES, Correspondance. Publ. par les soins de B. Baillaud et H. Bourget, avec une préface d'Émile Picard. T. 1 (8 novembre 1882—22 juillet 1889), avec portraits; T. 2 (18 octobre 1889—15 décembre 1894). — XX+477 p. & VI+464 p. 8. Fr. 16—(chaque vol.).

JOUFFRET, E., Mélanges de géométrie à quatre dimensions.

Coup d'œil sur les principes de la géom. à quatre dimensions. Le système de coordonnées et les trois premiers polyédroïdes réguliers. L'hexagramme de Pascal. La surface du 3e degré. L'hexagramme et l'hexastigme. Les hypersurfaces du 2e degré. Les quartiques. La question de l'existence réelle de l'hyperspace. — XI+227 p. 8.

LEBESGUE, H., Leçons sur les séries trigonométriques professées au Collège de France. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions, publ. sous la direction d'Émile Borel). — 128 p. 8.

Lindelöf, E., Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions. (Collection de monographies sur la théorie des fonctions.)

Principes et théorèmes fondamentaux. Applications diverses du calcul des résidus. Formules sommatoires tirées du calcul des résidus. Les fonctions $\Gamma(x)$, $\zeta(s)$, $\zeta(s, w)$. Applications au prolongement analytique et à l'étude asymptotique des fonctions définies par un développement de Taylor. — VI + 141 p. 8. Fr. 3,50.

Lucas de Pesloüan Ch., N.-H. Abel, Sa vie et son oeuvre. (Avec portrait.) — XIII + 168 p. 8.

Ocagne, M. d', Le calcul simplifié. 2^e éd., entièrement refondue et considérablement augmenté. — VIII + 228 p. 8.

Picard, É., et Simart, G., Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. T. 2: fasc. 2—3. — p. 207—528. 8.

Pionchon, J., Principes et formules de trigonométrie rectiligne et sphérique. Avec un appendice sur des minima et maxima de figures géométriques. (Bibliothèque de l'élève-ingénieur. Mathématiques.) — 146 p. 8. Fr. 5—.

Tannery, J., Leçons d'algèbre et d'analyse. A l'usage des élèves des classes de mathématiques spéciales.

T. 1. VII + 423 p. 8. Fr. 12—.

T. 2. 636 p. 8. Fr. 12—.

Francesco Giannini & Figli.

Napoli 1905.

Amodeo, F., Vita matematica napoletana. Studio storico, biografico, bibliografico. P. 1.

Stato delle matematiche a Napoli dal 1650 al 1732. Dai fratelli di Martino a Vito Caravelli. Nicolò Fergola. Gl' istituti d'istruzione e scientifici in Napoli intorno al 1800. — VIII + 216 p. 4. L. 10—.

Ginn & Company.

Boston, New York, Chicago, London 1904—05.

Fine, H. B., A college algebra.

P. 1: Numbers. P. 2: Algebra. — VIII + 595 p. 8. $ 1,50 (cloth.).

Goursat, E., A course in mathematical analysis. Transl. by Earle R. Hedrick. Vol. 1.

Derivates and differentials. Definite integrals. Expansion in series. Applications to geometry. — VIII + 548 p. 8. $ 4— (cloth.).

PIERPONT, J., Lectures on the theory of functions of real variables. Vol. 1.

Rational & irrational numbers. Exponentials & logarithms. The elementary functions. Notion of a function in general. First notions concerning point aggregates. Limits of functions. Continuity & discontinuity of functions. Differentiation. Implicit functions. Indeterminate forms. Maxima & minima. Integration. Proper & improper integrals. Integrand infinite. Improper integrals. Interval of integration infinite. Multiple proper integrals. — XII + 560 p. 8. Sh. 20—.

G. J. Göschen.

1905.

BÜRKLEN, O. TH., Aufgabensammlung zur analytischen Geometrie der Ebene. (Samml. Göschen 256.) — 196 p. 8. M. 0,80 (geb.).

CLASSEN, J., Zwölf Vorlesungen über die Natur des Lichtes. — X + 249 p. 8. M. 4— (geb.).

DOEHLEMANN, K., Projektive Geometrie in synthetischer Behandlung. Dritte, verm. u. verbesserte Aufl., mit 91 Figuren. (Samml. Göschen 72.) — 181 p. 8. M. 0,80 (geb.).

GLEICHEN, A., Vorlesungen über photographische Optik.

Die physikalischen u. geometrischen Grundlagen der Bilderzeugung. Die Bilderzeugung durch zentrierte Kugelflächen im paraxialen Gebiete. Die Strahlenbegrenzung. Die Achromasie. Das Seidelsche Gebiet u. die Petzval-Bedingung. Bedingung für die Aberrationsfreiheit von Punktepaaren bei endlichem Strahlengange. Der Astigmatismus. Die natürliche Blende u. die Abbildung durch Fundamentalstrahlen. Orthoskopie u. Helligkeit. Die symmetrischen Objektive. Geometrische Konstruktionen gebrochener Strahlen u. Strahlenbündel. Historische Notizen u. Konstruktionsdaten einiger Objektive. Die Technik der Durchrechnung. — IX + 230 p. 8. M. 9—.

HORN, J., Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. (Samml. Schubert L.)

Existenz d. Lösungen einer gewöhnl. Diff.-gl. beliebiger Ordn. u. eines Systems v. Diff.-gl. 1. Ordn. Allgemeine Sätze üb. lin. Diff.-gl. Lineare Substitutionen. Lineare Diff.-gl. mit konstanten Koeffizienten. Die Integrale linearer Diff.-gl. in der Umgebung singulären Stellen. Die Integrale einer lin. Diff.-gl. in der Umgeb. einer sing. Stelle d. Bestimmtheit. Diff.-gl. d. Fuchsschen Klasse. Asymptotische Darstellung d. Integrale einer lin. Diff.-gl. in der Nähe einer Un bestimmtheitsstelle. Entwickl. d. Integrale einer lin. Diff.-gl. in einem Kreisring... Lin. Diff.-gl. mit period. Koeffizienten. Elementare Integrationsmethoden. Multiplikatoren von Diff.-gl. Diff.-gl. mit Parametern. Periodische Lösungen. Singu-

laritäten d. Diff.-gl. Singuläre Lösungen. Diff.-gl. 2. Ordn. mit eindeutigem allgemeinem Integral. — X + 391 p. 8.

MAHLER, G., Ebene Geometrie. Vierte verbesserte Aufl., mit 110 zweifarbigen Figuren. (Samml. Göschen 41.) — 166 p. 8. M. 0,80 (geb.).

MEYER, W. FRANZ, Differential- und Integralrechnung. Bd 2: Integralrechnung. (Samml. Schubert XI.)

Grundlagen d. Integralrechnung. Anwendungen. Systematische Integralrechnung. — XVI + 443 p. 8. M. 10— (geb.).

SCHOUTE, P. H., Mehrdimensionale Geometrie. T. 2. Die Polytope. (Samml. Schubert XXXVI.)

Topologische Einleitung. Massverhältnisse. Regelmässige Polytope. Die runden Polytope. — IX + 326 p. 8. M. 10— (geb.).

SCHUBERT, H., Auslese aus meiner Unterrichts- und Vorlesungspraxis. 1—2.

1: Elementare Berechnung d. Logarithmen auf der untersten Stufe (Untersekunda.). Die Siebzehnteilung des Kreises. Die Kreisteilungsgleichungen. Die Zahl der von zwei Planspiegeln entworfenen Bilder. Volumen des Obelisken aus Höhe u. zwei oder drei beliebig gelegten Parallelschnitten. Üb. eine beim Aufbau des absoluten Masssystems begangene Inkonsequenz. Elementare Ableitung sehr enger Grenzen für die Schwingungszeit eines mathematischen Pendels. Die Konstantenzahl eines Polyeders u. der Eulersche Lehrsatz. Einführung in die neuere Geometrie. Kreise u. Kugeln.

2: Ganzzahligkeit in der algebraischen Geometrie. Kettenbrüche und Zahlentheorie. Vielstellige Berechnung der Logarithmen auf höherer Stufe (Prima), aber ohne logarithmische Reihen. — 239 & 218 p. 8. à M. 4— (geb).

VONDERLINN, J., Parallelperspektive. Rechtwinklige und schiefwinklige Axonometrie. (Samml. Göschen 260.) — 112 p. 8. M. 0,80 (geb.).

WIELEITNER, H., Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung. (Samml. Schubert XLIII.)

Allgemeine Gesichtspunkte. Polarentheorie. Die einfachen Singularitäten. Beziehung zwischen Ordnung u. Klasse einer Kurve. Übergang von Punkt- zu Linienkoordinaten. Theor. d. Einhüllenden. Die Hesse'sche u. verwandte Kurven. Die Plücker'schen Formeln. Geschlecht. Rationale Kurven. Das analyt. Dreieck. Asymptoten. Kurvendiskussion. Höhere Singularitäten. Transformation d. Kurven. Das verallgem. Korrespondenzprinzip. Schnittpunktsysteme auf Kurven. Anwend. d. Sätze üb. Schnittpunktsyst. Kurven 3. u. 4. Ordn. Systeme v. Kurven. Literatur-Verzeichnis. — XXII + 313 p. 8. M. 10— (geb.).

A. Hermann.

Paris 1906.

Ball, W. W. Rouse, Histoire des mathématiques. Ed. française rev. et augm. Trad. sur la 3e éd. anglaise par L. Freund. T. 1.

Les mathématiques dans l'antiquité. Les mathém. au moyen-âge et pendant la renaissance. Les mathém. modernes de Descartes à Huygens. Notes complémentaires. — VIII + 422 p. 8. Fr. 12—.

Dassen, C. C., Étude sur les quantités mathématiques. Grandeurs dirigées. Quaternions. — VI + 133 p. 8.

Issaly, Pierre, Les pseudo-surfaces appliquées à la généralisation ou à l'amendement de diverses théories classiques, issues du calcul infinitésimal. Complément aux trois précédents ouvrages de l'auteur sur les pseudo-surfaces. — VIII + 85 p. 8.

Ulrico Hoepli.

Milano 1905.

Brioschi, F., Opere matematiche. T. 4. Publ. per cura del comitato per le onoranze a Francesco Brioschi. — IX + 418 p. 4. L. 25—.

Marcolongo, R., Meccanica razionale, 1—2. (Manuali Hoepli 352—355).

1: Cinematica. Statica. 2: Dinamica. Principi di idromeccanica. — XVIII + 589 p. 16. L. 3—.

Vivanti, G., Elementi della teoria delle funzioni poliedriche e modulari. (Manuali Hoepli 366—67.) — VIII + 437 p. 8. L. 3—.

Lehmann & Stage.

1905.

Juel, Christian, Analytisk Plangeometri med en Indledning i Infinitesimalregningen. — 183 p. 8.

Macmillan & Co. Ltd.

London, New York 1905—06.

Ball W. W. Rouse, Mathematical recreations and essays. 4th ed.

Some arithmetical, geometrical & mechanical questions. Some miscellaneous questions. Magic squares. Unicursal problems. The mathem. tripos. Three geom. problems. Mersenne's numbers. Astrology. Cryptography and ciphers. Hyper-space. Time and its measurement. Matter and ether theories. — XVI + 388 p. 8. Sh. 7—.

MUIR, TH., The theory of determinants in the historical order of development. Ed. 2.

P. 1: General determinants up to 1841. P. 2: Special determinants up to 1841. — XI+491 p. 8. Sh. 17. 6 d.

The Open Court. Publishing Company.

Chicago 1905.

SMITH, D. E., A portfolio of portraits of eminent mathematicians. P. 1: Descartes, Pythagoras, Archimedes, Fermat, Leonardo of Pisa, Euclid, Cardan, Leibniz, Napier, Vieta, Newton, Thales. — P. 2: Pascal, Johann and Jakob Bernoulli, Gauss, Lagrange, l'Hopital, Cavalieri, Euler, Monge, Laplace, Tartaglia, Barrow. — On Jap. vellum \$ 5— each; on Amer. plate paper \$ 3— each.

Henry Paulin & C^ie^.

Paris 1904—05.

BOURGONNIER, A., et ROLLET, P., Cours de mécanique élémentaire.

1. Cinématique. Avec 116 figures dans le texte. VII+198 p. 8. Fr. 3—. (En cart. anglais fr. 4—.)
2. Statique et dynamique. Avec 154 figures dans le texte. 284 p. 8. Fr. 5—. (En cart. anglais fr. 6—.)

L. Pierro.

Napoli 1905.

AMODEO, F., Lezioni di geometria proiettiva dettate nella R. Universita di Napoli. Ed. 3.

Forme di 1° ordine. Forme di 2° ordine a una dimensione. — XIV+451 p. 8. L. 12—.

B. G. Teubner.

1904—06.

BRUNS, H., Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmasslehre. (B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern ... Bd 17.) — VIII+328 p. 8. M. 8,40 (geb.).

BUCHERER, A. H., Mathematische Einführung in die Elektronentheorie. — 148 p. 8. M. 3,20 (geb.).

Die physikalischen Institute der Universität Göttingen. Festschrift im Anschlusse an die Einweihung der Neubauten am 9. Dezember 1905.

Hrsg. von der Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik. — IV+200 p. 4.

GANS, R., Einführung in die Vektoranalysis mit Anwendungen auf die mathematische Physik. — X+98 p. 8. M. 2,80 (geb.).

GEISSLER, K., Anschauliche Grundlagen der mathematischen Erdkunde zum Selbstverstehen und zur Unterstützung des Unterrichts. Mit 52 Figuren im Text. — VI+199 p. 8. M. 3— (geb.).

HEFFTER, L. und KOEHLER, C., Lehrbuch der analytischen Geometrie. Bd 1: Geometrie in den Grundgebilden erster Stufe und in der Ebene. — XVI+526 p. 8. M. 14— (geb.).

MANES, A., Versicherungswesen. (Teubners Handbücher für Handel und Gewerbe ...). — XII+468 p. 8. M. 9,40 (geh.).

NIELSEN, N., Handbuch der Theorie der Gammafunktion.

Analytische Theorie der Gammafunktion. Bestimmte Integrale. Theorie der Fakultätenreihen. — X+326 p. 8. M. 12— (geb.).

Vieweg & Sohn.

Braunschweig 1905.

BIERMANN, O., Vorlesungen über mathematische Näherungsmethoden.

Das Rechnen mit genauen u. ungenauen Zahlen. Das rechnerische Prinzip in der höheren Analysis. Näherungsweise Auflösung von Gleichungen. Interpolations- und Differenzenrechnung. Anwendung der Interpolationsrechnung auf die näherungsweise Quadratur und Kubatur. Einige mathematische Instrumente. — IX+227 p. 8. M. 8— (in Lnwd geb. 8,50).

Vuibert el Nony.

Paris 1905—06.

BAIRE, R., Théorie des nombres irrationels, des limites et de la continuité. — 59 p. 8. Fr. 1,50.

GUICHARD, C., Traité de mécanique.

P. 1 (3e éd.): Cinématique à l'usage des élèves de classes de Première *C* et *D*.
P. 2 (2e éd.): Cinématique, statique, dynamique à l'usage des élèves des classes de mathem. *A* et *B*. — VIII+114 et VIII+196 p. 8. Fr. 3,50.

LEMAIRE, G., Méthodes de résolution et de discussion des problèmes de géométrie. Ed. 2.

Lieux géométriques. Méthode d'intersection des lieux géom. Détermination d'une droite. Translation. Rotation (1re partie). Symétrie. Méthode des figures semblables. Homothétie. Inversion. Transformation et partage de figures. — 223 p. 8. Fr. 2,50.

PAPELIER, G., Précis d'algèbre, d'analyse et de trigonométrie, à l'usage des élèves de mathématiques spéciales . . .

Compléments d'algèbre élémentaire. Éléments d'analyse infinitésimale. Théorie des équations. Trigonométrie. — 357 p. 8. Fr. 6,50. — Supplément au précis d'algèbre et de trigonométrie. — 106 p. 8. Fr. 1,75.

VOGT, H., Éléments de mathématiques supérieures . . . (Éd. 3).

Compléments d'algèbre. Principes de géométrie analytique. Dérivées et différentielles. Théorie des équations. Applications géométriques. Calcul intégral. Équations différentielles. Notes d'algèbre. Notes de géom. analyt. Exercices. — VII + 619 p. 8. Fr. 10—.

Nicola Zanichelli.

Bologna 1906.

ENRIQUES, F., Problemi della scienza.

Fatti e teorie. I problemi della logica. La geometria. La meccanica. Estensione della meccanica. — IV + 593 p. 8. L. 10—.